SUBIECTUL III - g)

autorul rezolvarii : prof. Liviu Stroie (www.matematic.ro)

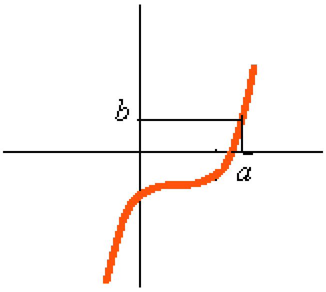
Fie $u \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad 3 astfel încât $u(k) \in \mathbb{Z}, \forall k \in \{1,2,3\}$.
Conform punctului anterior avem $u(k) \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
Să presupunem prin reducere la absurd că

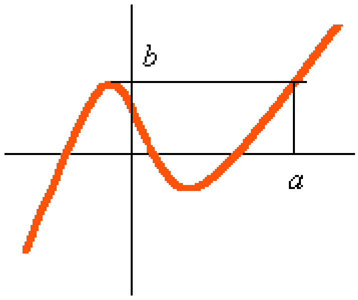
$$\text{pentru orice } p \in \mathbb{Z}\text{, există } k \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } u(k) = p. \qquad (1)$$

Distingem două cazuri:

1) coeficientul dominant al lui *u* este pozitiv;
2) coeficientul dominant al lui *u* este negativ.

1) se poate lesne demonstra (folosind derivata) că funcți polinomială atașată polinomului *u* are proprietățile de monotonie şi mărginire redate într-unul din graficele alăturate.





Aşadar există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$u \text{ este strict crescătoare pe } (a, \infty) \qquad (2)$$

şi

$$u(x) > b \Rightarrow x > a \qquad (3)$$

Dacă luăm $x_0 = [a] + 1$ şi $y_0 = u(x_0)$ atunci rezultă prin inducție că

$$u(x_0 + k) = y_0 + k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lăsăm demonstrația ca exercițiu (se vor folosi proprietățile (1), (2) şi (3) de mai sus)

Notând acum $f(X) = u(X) - X - (y_0 - x_0)$ avem :

$$f(x_0 + k) = (y_0 + k) - (x_0 + k) - (y_0 - x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0 + k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Rezultă că $f = 0$ şi deci $u(X) = X + (y_0 - x_0)$, adică *u* este polinom de gradul I , contradicție !

2) Dacă *u* are proprietatea (1) atunci evident şi $-u$ are această proprietate. Dar $-u$ face parte din tipul (cazul) anterior.

Cu aceasta problema este rezolvată.