PROBĂ SCRISĂ LA MATEMATICĂ

Sesiunea specială iunie 2004

PROBA D. **M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, specializarea matematică-informatică**

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii Se acordă 10 puncte din oficiu.Timpde lucru efectiv 3 ore. **Varianta 1**

SUBIECTUL I (30p)

➢ **Pentru întrebările 1-5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen**

(3p) **1.** Câte elemente din mulțimea $\{1,2,3,...,10\}$ se divid cu 2 sau cu 3?

a) 8; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7

(3p) **2.** Care este probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1,2,3,...,10\}$, să fie număr prim?

a) 0,5; **b)** 0,4; **c)** 0,6; **d)** 0,3

(3p) **3.** Câte elemente inversabile față de înmulțire are inelul $\mathbf{Z}_9$?

a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7

(3p) **4.** Câte elemente de ordinul 5 are grupul $(\mathbf{Z}_5,+)$?

a) 4; **b)** 3; **c)** 1; **d)** 2

(3p) **5.** Câte funcții bijective definite pe mulțimea $\{1,2,3\}$ cu valori în mulțimea $\{4,5,6\}$, există?

a) 6; **b)** 5; **c)** 9; **d)** 7

➢ **Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen**

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x^2-x|$.

(3p) **6.** Câte puncte de discontinuitate are funcția f?

(3p) **7.** În câte puncte nu este derivabilă funcția f?

(3p) **8.** Care este aria suprafeței plane conținută între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$?

(3p) **9.** Cum este funcția f pe intervalul $(0;1)$: convexă sau concavă ?

(3p) **10.** Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)\right)$?

➢ **Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete**

SUBIECTUL II (20p)

Într-un plan se consideră patrulaterul convex $ABCD$, având laturile $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ şi $AD=d$. Notăm $2p=a+b+c+d$, cu B măsura unghiului $\widehat{ABC}$, cu D măsura unghiului $\widehat{ADC}$ şi cu S aria patrulaterului $ABCD$.

(4p) **a)** Să se arate că $2S=ab\sin B+cd\sin D$.

(4p) **b)** Să se deducă relația $4S^2=a^2b^2\sin^2 B+c^2d^2\sin^2 D+2abcd\sin B\sin D$.

(4p) **c)** Utilizând teorema cosinusurilor în triunghiurile ABC şi ADC, să se arate că $a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D$.

(4p) **d)** Să se deducă egalitatea

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=4a^2b^2\cos^2 B+4c^2d^2\cos^2 D-8abcd\cos B\cos D$$

(2p) **e)** Utilizând formula $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$ şi relațiile de la punctele **b)** şi **d)** , să se arate că,

$$16S^2=4a^2b^2+4c^2d^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-8abcd\,cos(B+D).$$

(2p) **f)** Utilizând formula $cos\,x=2cos^2\frac{x}{2}-1$, să se arate că

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincte şi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ arbitrare, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

Definim polinoamele $w_1 = \dfrac{(X-a_2)(X-a_3)\ldots(X-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$, $w_2 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_3)\ldots(X-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}$,

$\ldots$, $w_n = \dfrac{(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}$ şi $L_n = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n$.

(4p) **a)** Să se verifice că $w_i(a_j) = 0$, $\forall i \neq j,\ i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $w_1(a_1) = w_2(a_2) = \ldots = w_n(a_n) = 1$.

(4p) **c)** Să se verifice că grad (w_1) = … = grad (w_n) = $n-1$.

(4p) **d)** Să se arate că polinomul L_n are gradul cel mult $n-1$ şi $L_n(a_k) = b_k$, $\forall\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $f \in \mathbf{R}[X]$, grad$(f) \leq n-1$ şi $f(a_k) = b_k$, $\forall\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$, atunci $f = L_n$.

(2p) **f)** Să se arate că $(17a_1+11)w_1 + (17a_2+11)w_2 + \ldots + (17a_n+11)w_n = 17X + 11$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, unde $\alpha \in (0,1)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

(4p) **b)** Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$ şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1,\infty)$.

(4p) **c)** Să se deducă inegalitatea $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $\forall x > 0$.

(2p) **d)** Alegând $x = \dfrac{a}{b}$, cu $a, b > 0$ şi notând $\beta = 1 - \alpha$, să se arate că $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$, $\forall a, b > 0$ şi $\forall \alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

(2p) **e)** Să se arate că $st \leq \dfrac{s^p}{p} + \dfrac{t^q}{q}$, $\forall s, t > 0$ şi $\forall\ p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(2p) **f)** Utilizând inegalitatea de la punctul **e)**, să se arate că, dacă $a_1, \ldots, a_n$ şi $b_1, \ldots, b_n$ sunt numere reale strict pozitive, $p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, atunci

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leq \left(a_1{}^p + \ldots + a_n{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(b_1{}^q + \ldots + b_n{}^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(2p) **g)** Să se demonstreze că, dacă $h, g : [0,1] \to (0,\infty)$ sunt două funcţii continue şi $p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, atunci $\displaystyle\int_0^1 h(x) g(x)\,dx \leq \left(\int_0^1 h^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$.