

Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2008

EDIȚIA a V-a SLATINA – 28 – 29 noiembrie 2008

Clasa a IV-a

- Câte semne „+“ sunt în egalitatea $3 + 3 + 3 + \dots + 3 = 213$?
 - Numerele naturale a, b, c sunt consecutive, iar produsul lor este 990. Aflați numărul b .
 - Scrieți numerele naturale a, b, c și d în ordine descrescătoare, știind că

$$a - 8 = b + 7 = c - 7 = d + 8.$$

2. Calculați:

- $99996 : 3$.
- $(1\,000\,000 - 4) : 3$.
- $\left(\underbrace{100\dots0}_{100 \text{ cifre de } 0} - 4 \right) : 3$.

3. Cristi și Mircea sunt prieteni. Mircea are o bicicletă. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 2 ciocolate, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 3 ore. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 28 de caramelle, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 2 ore. Aflați pentru cât timp va primi Cristi bicicleta lui Mircea în cazul în care Cristi îi oferă lui Mircea o ciocolată și 7 caramelle.

4. Fie $N = 123456789101112\dots$ (se "lipesc" numerele naturale în ordine crescătoare începând de la 1). Care este cifra de pe poziția 20008?

Clasa a V-a

1. Să se determine numerele naturale \overline{abc} cu proprietatea

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}.$$

Florin Dumitrel

2. Suma a 10 numere naturale este 2008. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural n , obținem resturi egale cu 2 sau cu 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 27.

- Câte resturi, dintre cele 10, sunt egale cu 2?
- Determinați cel mai mic număr n care satisface condițiile din enunț.

Florica Banu

3. Mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\}$ are următoarele proprietăți:

- Media aritmetică a elementelor mulțimii A este egală cu 2008.
 - Dacă eliminăm cel mai mic element al mulțimii A , media aritmetică a elementelor rămase este 2010.
 - Dacă eliminăm cel mai mare element al mulțimii A , media aritmetică a elementelor rămase este 2006.
- Determinați numărul de mulțimi A care au aceste proprietăți.

Mircea Fianu

4. O pereche de numere naturale (m, n) se numește *interesantă* dacă atunci când calculăm suma $m + n$ nu au loc treceri peste ordin. De exemplu: o pereche *interesantă* cu suma 76 este $(22, 54)$ iar o pereche cu suma 76 care nu este *interesantă* este $(49, 27)$.

Să se calculeze numărul perechilor *interesante* cu suma 2793.

Marius Perianu

Clasa a VI-a

1. a) Să se determine care pot fi ultimele două cifre ale sumei a 75 de numere naturale consecutive.
 b) Patru numere naturale nenule au proprietatea că media aritmetică a oricăror trei este divizibilă cu al patrulea. Să se demonstreze că numerele sunt egale.

Costel Anghel, Marius Perianu

2. Determinați cel mai mic număr natural n cu proprietatea că suma resturilor obținute prin împărțirea la 10, 11, 12, ..., 19 este egală cu 135.

Emil Ciolan

3. Fie $a = 2008! + 2007! + \dots + 3! + 2!$, unde pentru $n \in \mathbb{N}^*$ am notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ și $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10. Dacă

$$s = \overline{a_1 a_2} + \overline{a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6} + \dots \text{ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre),}$$

să se arate că a și s nu sunt pătrate perfecte.

Cătălin Amza

4. Pe o dreaptă d se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{45}$, astfel încât

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = \dots = A_{44} A_{45} = 1.$$

Să se arate că oricum am alege 10 puncte din mulțimea $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{45}\}$, există printre acestea 4, notate M, N, P, Q , astfel încât segmentele $[MN]$ și $[PQ]$ să aibă același mijloc.

*Maria Pop***Clasa a VII-a**

1. Se consideră pătratul $ABCD$ și O punctul de intersecție al diagonalelor sale. Construim pătratul $OEFG$, congruent cu $ABCD$, astfel încât $B \in (AE)$.

- a) Să se arate că punctele B, C, G sunt coliniare.
 b) Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului BEO .

Costel Anghel

2. Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se poate partiționa în mod unic în două submulțimi nevide A, B cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x < y$, astfel încât $x \mid y$, sunt îndeplinite următoarele condiții:

- a) dacă $x \in A$ atunci $y \in B$;
 b) dacă $y \in B$ atunci există $d \in A$ astfel încât $d \mid x$.

Marius Perianu

3. Aflați numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)}$ să fie pătrat perfect, unde $[x, y]$ și (x, y) reprezintă cel mai mic multiplu comun respectiv cel mai mare divizor comun al numerelor x și y .

Alexandru Ciolan

4. Să se determine toate valorile numărului natural nenul k pentru care există un dreptunghi care se poate împărți, ducând paralele la laturile sale, atât în k pătrate congruente cât și în $k + 88$ pătrate congruente.

Marius Perianu

Clasa a VIII-a

1. a) Să se arate că $(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = x^2 - 3y^2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 b) Să se arate că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\sqrt{3n^2 + 7n + 4} \in \mathbb{Q}$.

Florian Dumitrel

2. Fie $A_1 A_2 \dots A_n$ un poligon regulat cu $n \geq 4$ vârfuri. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulțimi $M \subset \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ astfel încât oricare patru puncte din M să nu fie vârfurile unui dreptunghi (sau pătrat).

Vasile Pop

3. Fie A și B două mulțimi de numere naturale nenule cu proprietatea că pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numerele $\frac{b^{2n-1} + b^{2n}}{a^{2n-1}}$ și $\frac{a^{2n} + a^{2n+1}}{b^{2n}}$ sunt naturale. Să se demonstreze că $A \subset B$.

Marius Perianu

4. Se consideră piramida $VABCD$, cu $ABCD$ patrulater convex. Se notează M, N, P, Q mijloacele muchiilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$ și G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, VBC, VCD , respectiv VDA . Să se demonstreze că dreptele MG_3, NG_4, PG_1, QG_2 sunt concurente.

*Costel Anghel***Clasa a IX-a**

1. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, să se arate că:

a) $\frac{4a}{a^2 + bc} \leq \frac{b+c}{bc}$;
 b) $\frac{8}{3} \left(\frac{a^2}{a^2 + bc} + \frac{b^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ab} \right) \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 1$.

Costel Anghel

2. Pentru fiecare submulțime nevidă $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ definim numărul

$$S_A = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k-1} a_k.$$

Să se calculeze suma tuturor acestor numere.

Maria Pop

3. Fie mulțimea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$, unde $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n + n^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se arate că $A \cap \mathbb{Q} = \{1\}$.
 b) Să se calculeze $\sum_{k=1}^n [a_k^2]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Florian Dumitrel

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$.

- a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor B și D sunt paralele.
 b) Fie punctele $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CD)$ și $S \in (DA)$ astfel încât $[AP] \equiv [CQ]$ și $[AS] \equiv [CR]$. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor $[AC]$, $[PQ]$ și $[RS]$ sunt coliniare.

[* * *]

Clasa a X-a

1. a) Să se arate că mulțimea $A = [0, 1]$ are proprietatea:

$$(\mathbf{P}) : \forall a, b \in A \Rightarrow a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \in A.$$

b) Să se arate că dacă o mulțime $A \subset \mathbb{Q}$ are proprietatea (\mathbf{P}) , atunci pentru orice element $a \in A \setminus \{0, 1\}$, $a = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât m, n, p să fie laturile unui triunghi dreptunghic.

c) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, există o mulțime cu proprietatea (\mathbf{P}) având m elemente.

Marius Perianu

2. Să se decidă dacă există două numere naturale m, n și două funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

$$(f \circ g)(x) = x^{2m+1} \quad \text{și} \quad (g \circ f)(x) = x^{2n+2}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

3. Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} \log_{12}(x^2 - x) = \log_4 y \\ \log_{12}(y^2 - y) = \log_4 z \\ \log_{12}(z^2 - z) = \log_4 x \end{cases}.$$

Marius Perianu

4. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația:

$$xf(-x, y) + yf(x, -y) = (x - y)^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ astfel încât $\sigma(\sigma(\sigma(1))) = 2$.

Dinu Șerbănescu

2. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ o matrice cu elemente reale pozitive astfel încât $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, pentru orice $i = \overline{1, n}$.

a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^k este n .

b) Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ verifică relația $\det(A - \lambda I_n) = 0$, atunci $|\lambda| \leq 1$.

Vasile Pop

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 > 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + n}$ pentru $n \geq 1$.

a) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.

Florian Dumitrel

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2} = \frac{1}{2}$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Florian Dumitrel

Clasa a XII-a

1. Se consideră o mulțime nevidă A și o mulțime F de funcții de la A la A , astfel încât (F, \circ) să fie grup (unde \circ este compunerea funcțiilor).

a) Demonstrați că există o mulțime $B \subset A$ care îndeplinește condițiile:

1) pentru orice $f \in F$, $\text{Im } f \subset B$ (unde $\text{Im } f$ este imaginea funcției f);

2) pentru orice $f \in F$, restricția $f_B : B \rightarrow B$ a funcției f la mulțimea B este bijecție;

b) Arătați că dacă $x, y \in A$ și există $f_0 \in F$ astfel încât $f_0(x) = f_0(y)$, atunci $f(x) = f(y)$, $\forall f \in F$.

Mihai Băluță

2. Fie (G, \cdot) un grup și $a, b \in G$. Se știe că suma dintre numărul elementelor lui G care comută cu a și numărul elementelor din G care comută cu b este un număr prim. Să se determine numărul elementelor care comută și cu a și cu b .

Marian Andronache

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arctg x^2}{1+x^2}$ și F primitiva sa care se anulează în $x_0 = 0$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Florian Dumitrel

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică. Dacă F este o primitivă a funcției f , să se arate că șirul

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{F(k)}{k^2}$$

este convergent dacă și numai dacă F este periodică.

Florian Dumitrel

Soluții**Clasa a IV-a**

1. a) $213 : 3 = 71$, deci sunt 71 de cifre egale cu 3 în adunarea dată. Între ele sunt 70 de semne +.

b) $990 = 10 \cdot 99 = 10 \cdot 9 \cdot 11 = 9 \cdot 10 \cdot 11$, deci $a = 9$, $b = 10$, $c = 11$.

c) Din relațiile date, obținem:
$$\left. \begin{array}{l} c = b + 14 \Rightarrow c > b \\ a = c + 1 \Rightarrow a > c \\ b = d + 1 \Rightarrow b > d \end{array} \right\} \Rightarrow a > c > b > d.$$

2. a) 33 332

b) $999\,996 : 3 = 333\,332$

c)
$$\left(\underbrace{100\dots0}_{100 \text{ cifre de } 0} - 4 \right) : 3 = \underbrace{999\dots96}_{99 \text{ cifre de } 9} : 3 = \underbrace{333\dots32}_{99 \text{ cifre de } 3}$$

3. 2 ciocolate \rightarrow 3 ore \Rightarrow 1 ciocolată = 1 oră și 30 de minute(2p)

28 caramele \rightarrow 2 ore \Rightarrow 14 caramele \rightarrow 1 oră(2p)

14 caramele \rightarrow 1 oră \Rightarrow 7 caramele \rightarrow 30 minute(2p)

1 ciocolată + 7 caramele \rightarrow 2 ore(1p)

4. Pentru a scrie numerele de la 1 la 9 se folosesc $9 \times 1 = 9$ cifre

Pentru a scrie numerele de la 10 la 99 se folosesc $90 \times 2 = 180$ cifre

Pentru a scrie numerele de la 100 la 999 se folosesc $900 \times 3 = 2700$ cifre

Pentru a scrie numerele de la 1000 la 9999 se folosesc $9000 \times 4 = 36\,000$ cifre

Deoarece pentru scrierea tuturor numerelor de cel mult trei cifre se folosesc $9 + 180 + 2700 = 2889$ cifre, iar pentru scrierea tuturor numerelor de cel mult 4 cifre se folosesc $9 + 180 + 2700 + 36\,000 = 38\,889$ cifre, înseamnă că cifra de pe poziția 20 008 se află într-un număr de patru cifre.

$20\,008 - 2889 = 17\,119$ cifre trebuie să mai scriem folosind numere de 4 cifre pentru a ajunge la cifra de pe poziția 20 008.

$17\,119 : 4 = 4279$ rest 3, deci cifra de pe poziția 20 008 este a treia cifră a celui de-al 4280-lea număr de patru cifre.

Cum acesta este $1000 + 4280 - 1 = 5279$, cifra de pe poziția 20 008 este 7.

Clasa a V-a

1. Din relația din enunț deducem că a, b, c sunt cifre nenule și

$$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c \Leftrightarrow 89a = 10c + b = \overline{cb}.$$

Presupunând $a \geq 2 \Rightarrow \overline{cb} \geq 178$, fals. Așadar $a = 1$ și $\overline{cb} = 89$, deci $\overline{abc} = 198$.

2. a) Dacă a este numărul resturilor egale cu 2 și b este numărul resturilor egale cu 3, rezultă $2a + 3b = 27$ și $a + b = 10$, de unde $a = 3$ și $b = 7$. Așadar sunt 3 resturi egale cu 2.

b) Fie x_1, x_2, \dots, x_{10} cele 10 numere și c_1, c_2, \dots, c_{10} câturile obținute prin împărțirea lor la n . Evident $n \geq 4$. Conform punctului a), avem:

$$x_1 = n \cdot c_1 + 2, \quad x_2 = n \cdot c_2 + 2, \quad x_3 = n \cdot c_3 + 2$$

și

$$x_4 = n \cdot c_4 + 3, \quad x_5 = n \cdot c_5 + 3, \quad \dots, \quad x_{10} = n \cdot c_{10} + 3.$$

Întrucât $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 2008$, folosind relațiile de mai sus rezultă $n \cdot (c_1 + c_2 + \dots + c_{10}) + 27 = 2008$, de unde $n \cdot (c_1 + c_2 + \dots + c_{10}) = 1981$, deci n este un divizor mai mare al lui 1981, mai mare sau egal cu 4. Cel mai mic număr cu această proprietate este $n = 7$.

3. Dacă $a < b < c < d < e$, atunci

$$\begin{aligned}(a + b + c + d + e) &: 5 = 2008 \Rightarrow a + b + c + d + e = 10040, \\(b + c + d + e) &: 4 = 2010 \Rightarrow b + c + d + e = 8040, \\(a + b + c + d) &: 4 = 2006 \Rightarrow a + b + c + d = 8024.\end{aligned}$$

Rezultă $a = 2000$, $e = 2016$ și $b + c + d = 6024$, cu $2000 < b < c < d < 2016$. Cum $b < c < d$, rezultă $3b < 6024$, deci $b < 2008$.

- $b = 2001 \Rightarrow c + d = 4023$ și $2001 < c < d < 2016$, cu 4 soluții: $(2008, 2015)$, $(2009, 2014)$, ..., $(2011, 2012)$.
- $b = 2002 \Rightarrow c + d = 4022$ și $2002 < c < d < 2016$, cu 4 soluții: $(2007, 2015)$, $(2008, 2014)$, ..., $(2010, 2012)$.
- $b = 2003 \Rightarrow c + d = 4021$ și $2003 < c < d < 2016$, cu 5 soluții: $(2006, 2015)$, $(2007, 2014)$, ..., $(2010, 2011)$.
- $b = 2004 \Rightarrow c + d = 4020$ și $2004 < c < d < 2016$, cu 5 soluții: $(2005, 2015)$, $(2006, 2014)$, ..., $(2009, 2011)$.
- $b = 2005 \Rightarrow c + d = 4019$ și $2005 < c < d < 2016$, cu 4 soluții: $(2006, 2013)$, $(2007, 2018)$, ..., $(2009, 2010)$.
- $b = 2006 \Rightarrow c + d = 4018$ și $2006 < c < d < 2016$, cu 2 soluții: $(2007, 2011)$, $(2008, 2010)$.
- $b = 2007 \Rightarrow c + d = 4017$ și $2007 < c < d < 2016$, cu 1 soluție: $(2008, 2009)$.

În concluzie sunt 25 astfel de mulțimi.

4. Dacă (m, n) este o pereche *interesantă* cu suma 2793, atunci m și n sunt numere de cel mult 4 cifre, $m = a_1b_1c_1d_1$ și $n = a_2b_2c_2d_2$ (cifrele $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ pot fi și 0) astfel încât $a_1 + a_2 = 2$, $b_1 + b_2 = 7$, $c_1 + c_2 = 9$ și $d_1 + d_2 = 3$.

Dacă $a_1 + a_2 = 2$, atunci (a_1, a_2) pot fi $(0, 2)$, $(1, 1)$ sau $(2, 0)$, deci aceasta poate fi aleasă în 3 moduri.

Analog, o pereche (b_1, b_2) cu $b_1 + b_2 = 7$ poate fi aleasă în 8 moduri, o pereche (c_1, c_2) în 10 moduri, iar o pereche (d_1, d_2) în 4 moduri.

În concluzie, sunt $3 \times 8 \times 10 \times 4 = 960$ perechi interesante cu suma 2793.

Clasa a VI-a

1. a) Fie n cel mai mic dintre cele 75 de numere; atunci acestea sunt $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 74$, iar suma lor este

$$S = 75n + (1 + 2 + \dots + 74) = 75n + 2775.$$

Notăm $zu(S)$ numărul format de ultimele două cifre ale lui S .

- Dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75 \cdot 4k + 2775 = 300k + 2775 = 100(3k + 27) + 75 \Rightarrow zu(S) = 75$.
- Dacă $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75(4k + 1) + 2775 = 300k + 2850 = 100(3k + 28) + 50 \Rightarrow zu(S) = 50$.
- Dacă $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75(4k + 2) + 2775 = 300k + 2925 = 100(3k + 29) + 25 \Rightarrow zu(S) = 25$.
- Dacă $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75(4k + 3) + 2775 = 300k + 3000 = 100(3k + 30) \Rightarrow zu(S) = 00$.

În concluzie, ultimele cifre ale lui S pot fi 00, 25, 50 sau 75.

b) Fie $a \leq b \leq c \leq d$ cele patru numere. Din faptul că $d \mid \frac{a + b + c}{3}$, rezultă:

$$3d \mid a + b + c \Rightarrow 3d \leq a + b + c \Rightarrow 3d \leq a + 2d \Rightarrow d \leq a.$$

Așadar $a = b = c = d$.

2. Dacă n este un număr ca în enunț, atunci există numerele naturale c_1, c_2, \dots, c_{10} și r_1, r_2, \dots, r_{10} astfel încât

$$\begin{aligned} n &= 10c_1 + r_1 \text{ și } r_1 < 10 \Rightarrow r_1 \leq 9 \\ n &= 11c_2 + r_2 \text{ și } r_2 < 11 \Rightarrow r_2 \leq 10 \\ n &= 12c_3 + r_3 \text{ și } r_3 < 12 \Rightarrow r_3 \leq 11 \\ &\dots\dots\dots \\ n &= 19c_{10} + r_{10} \text{ și } r_{10} < 19 \Rightarrow r_{10} \leq 18 \end{aligned}$$

Avem $r_1 + r_2 + \dots + r_{10} \leq 9 + 10 + 11 + \dots + 18 = 135$. Dar, din enunț, $r_1 + r_2 + \dots + r_{10} = 135$, deci $r_1 = 9$, $r_2 = 10$, $r_3 = 11$, ..., $r_{10} = 18$. Rezultă că n este nenul și:

$$\begin{array}{ccccccc} n = 10c_1 + 9 & \Rightarrow & n + 1 = 10c_1 + 10 = 10(c_1 + 1) & \Rightarrow & 10 \mid n + 1 \\ n = 11c_2 + 10 & \Rightarrow & n + 1 = 11c_2 + 11 = 11(c_2 + 1) & \Rightarrow & 11 \mid n + 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n = 19c_{10} + 18 & \Rightarrow & n + 1 = 19c_{10} + 19 = 19(c_{10} + 1) & \Rightarrow & 19 \mid n + 1 \end{array}$$

Cel mai mic număr n cu proprietățile de mai sus este

$$n = \text{c.m.m.m.c.}(10, 11, 12, \dots, 19) - 1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 - 1 = 77\,597\,519.$$

3. Deoarece pentru $n \geq 5$ numărul $n!$ se termină în 0, rezultă că ultima cifră a lui a este ultima cifră a numărului $4! + 3! + 2! = 32$, adică 2, deci a nu este pătrat perfect.

Restul împărțirii lui s la 3 este același cu restul împărțirii sumei $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ la 3, deoarece

$$s = 9(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) + (a_1 + a_2 + \dots + a_p),$$

și același cu restul împărțirii lui a la 3, adică 2 (deoarece numerele $n!$, cu $n \geq 3$ sunt multipli de 3). Ca urmare, s este de forma $3k + 2$, deci nu este pătrat perfect, întrucât orice pătrat perfect dă restul 0 sau 1 la împărțirea cu 3.

4. Numărul segmentelor cu extremitățile în 2 din cele 10 puncte alese este $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$, iar lungimea oricărui astfel de segment este un număr natural cuprins între 1 și 44. Rezultă că există două astfel de segmente cu aceeași lungime, fie acestea $[AB]$ și $[CD]$.

- Dacă $[AB]$ și $[CD]$ nu au puncte comune, presupunem că punctele A, B, C, D se află pe dreaptă în ordinea $A - B - C - D$. Notând cu M mijlocul lui $[BC]$ rezultă

$$AM = AB + BM = CD + CM = DM,$$

adică segmentele $[BC]$ și $[AD]$ au același mijloc.

- Dacă $[AB]$ și $[CD]$ au puncte comune, presupunând că punctele A, B, C, D se află pe dreaptă în ordinea $A - C - B - D$. Atunci $AC = AB - BC$ și $BD = CD - BC$, deci $[AC] \equiv [BD]$. Ca mai sus, notând cu M mijlocul lui $[BC]$ obținem

$$AM = AC + CM = BD + BM = DM,$$

adică segmentele $[BC]$ și $[AD]$ au același mijloc.

Clasa a VII-a

1. a) Unghiurile \widehat{COG} și \widehat{BOE} au același complement – unghiul \widehat{EOC} , deci sunt congruente. Cum $[OB] \equiv [OC]$ și $[OE] \equiv [OG]$, rezultă că $\triangle BOE \equiv \triangle COG$ (LUL), de unde $\widehat{OBE} \equiv \widehat{OCG}$. Dar $m(\widehat{OBE}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, de unde rezultă că $m(\widehat{OCG}) = 135^\circ$, deci $m(\widehat{BCG}) = 180^\circ$, adică B, C, G sunt coliniare.

b) Construim $OM \perp AD$, $M \in AD$ și $BN \parallel OE$, $N \in OM$. Patrulaterul $BEON$ este paralelogram, de unde rezultă că $[BN] \equiv [OE] \equiv [BC]$ și triunghiul NBC este echilateral (N aparține mediatoarei lui $[BC]$), deci $NB = NC = BC$. Rezultă că $m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{OBN}) = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Cum $m(\widehat{OBE}) = 135^\circ$ rezultă $m(\widehat{BEO}) = 30^\circ$.

2. Vom arăta că A este mulțimea numerelor prime.

Presupunem că B conține un număr prim p . Cum A este nevidă, A conține cel puțin un element a ; atunci $a \mid ap$, deci $ap \in B$. Dar $p \mid ap \in B$, deci există $d \in A$ astfel încât $d \mid p$ și cum $1 \notin A$, rezultă $d = p$, adică $p \in A$, contradicție. Ca urmare, B nu conține nici un număr prim, deci acestea sunt toate în A .

Din prima condiție rezultă că A nu conține numere compuse, deoarece, presupunând că A conține un număr compus a , ar exista $p, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, prime, astfel încât $pq \mid a$. Cum $p \mid a \Rightarrow a \in B$.

3. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)} = k^2$.

Vom rezolva mai întâi ecuația $2^m + 3^n = k^2$, unde $m, n, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $m = 1$ atunci $2^m + 3^n \equiv 2 \pmod{3} \neq k^2$. Deci $m \geq 2$. Atunci $2^m \equiv 0 \pmod{4}$. Știm că $3^n \equiv 1 \pmod{4}$ pentru n par și $3^n \equiv 3 \pmod{4}$ pentru n impar. Cum $k^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ rezultă că n trebuie să fie par. Fie $n = 2t$, $t \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $2^m = (k - 3^t)(k + 3^t)$. Fie $k - 3^t = 2^\alpha$ și $k + 3^t = 2^\beta$, cu $\alpha + \beta = m$, $\alpha < \beta$.

Rezultă în continuare $2^\beta - 2^\alpha = 2 \cdot 3^t$

(*)

Dacă $\alpha = 0$ rezultă că 2^β trebuie să fie impar $\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3^t = 0$, imposibil. Deci $\alpha \geq 1$.

Din (*) avem $2^{\alpha-1}(2^{\beta-\alpha} - 1) = 3^t$. Dacă $\alpha \geq 2$ rezultă $3^t : 2$, absurd. Atunci $\alpha = 1$. Avem în continuare $2 + 2 \cdot 3^t = 2^\beta \Rightarrow 1 + 3^t = 2^{\beta-1}$, $t > 0$. Știm că $2^{\beta-1} \equiv 1 \pmod{3}$ pentru $\beta-1$ par și $2^{\beta-1} \equiv 2 \pmod{3}$ pentru $\beta-1$ impar. Trebuie deci ca $\beta-1 = 2b$, $b \in \mathbb{N}$. Avem astfel $3^t = (2^b - 1)(2^b + 1)$. Fie $2^b - 1 = 3^u$ și $2^b + 1 = 3^v$, cu $u + v = t$ și $u < v$. Obținem $3^v - 3^u = 2 \Leftrightarrow 3^u(3^{v-u} - 1) = 2$. De aici $u = 0$ și $v = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow t = 1$. Prin urmare $m = 4$ și $n = 2$.

Astfel, dacă $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)}$ este pătrat perfect trebuie ca $[x,y] = 4$ și $(x,y) = 2$. Fie $D = (x,y)$ și $x = DX$, $y = DY$, $X, Y \in \mathbb{N}^*$, $(X,Y) = 1$.

Din $[x,y] \cdot (x,y) = xy \Rightarrow [x,y] = D \cdot X \cdot Y$. Dar $D = 2$ și $D \cdot X \cdot Y = 4$, de unde $X = 1$, $Y = 2$ și $X = 2$, $Y = 1$. Atunci $(x,y) \in \{(2,4), (4,2)\}$.

4. Presupunem că laturile a și b ale dreptunghiului se împart în m_1 , respectiv n_1 segmente de lungime u , formându-se, prin paralele la laturi, k pătrate de latură u , și în m_2 , respectiv n_2 segmente de lungime v , formându-se $k + 88$ pătrate de latură v ($m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$).

Atunci $\begin{cases} a = m_1 u = m_2 v \\ b = n_1 u = n_2 v \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v}{u}$. În plus, $k = m_1 n_1$ și $k + 88 = m_2 n_2$, deci $m_2 n_2 - m_1 n_1 = 88$.

Fie $(m_1, m_2) = d_1$, $(n_1, n_2) = d_2$; atunci există $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, astfel încât $m_1 = p d_1$, $n_1 = p d_2$, $m_2 = q d_1$, $n_2 = q d_2$ ($\frac{p}{q}$ este fracția ireductibilă obținută din $\frac{m_1}{m_2}$ și respectiv $\frac{n_1}{n_2}$ simplificând prin d_1 și respectiv d_2).

Rezultă $d_1 d_2 q^2 - d_1 d_2 p^2 = 88 \Leftrightarrow d_1 d_2 (q - p)(q + p) = 88$. Cum numerele $q - p$ și $q + p$ au aceeași paritate, și $(p, q) = 1$, rezultă că singurele cazuri posibile sunt:

$$\begin{cases} q - p = 1 \\ q + p = 11 \\ d_1 d_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 5 \\ q = 6 \\ d_1 d_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow k = m_1 n_1 = p^2 d_1 d_2 = 200.$$

$$\begin{cases} q - p = 2 \\ q + p = 4 \\ d_1 d_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 3 \\ d_1 d_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow k = m_1 n_1 = p^2 d_1 d_2 = 11.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q - p = 2 \\ q + p = 22 \\ d_1 d_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 10 \\ q = 12 \\ d_1 d_2 = 2 \end{array} \right. , \text{ nu convine, deoarece } (p, q) = 2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q - p = 4 \\ q + p = 22 \\ d_1 d_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 9 \\ q = 13 \\ d_1 = d_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow k = m_1 n_1 = p^2 d_1 d_2 = 81.$$

Soluțiile sunt $k \in \{11, 81, 200\}$.

Clasa a VIII-a

1. a) Verificare directă.

b) Întrucât $3n^2 + 7n + 4 = (3n + 4)(n + 1)$ și $(3n + 4, n + 1) = 1$, rezultă că $\sqrt{3n^2 + 7n + 4} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă

$$n + 1 \text{ și } 3n + 4 \text{ sunt pătrate perfecte.} \quad (1)$$

adică există $u, v \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $3n + 4 = u^2$ și $n + 1 = v^2$, de unde obținem

$$u^2 - 3v^2 = 1. \quad (2)$$

Observăm că numerele naturale $u = 2$ și $v = 1$ verifică relația (2).

Conform punctului a), dacă $u^2 - 3v^2 = 1$, notând $U = 2u + 3v$ și $V = u + 2v$, rezultă

$$U^2 - 3V^2 = u^2 - 3v^2 = 1,$$

deci (U, V) este o altă pereche ce verifică relația (2), cu $U > u$ și $V > v$.

Notând $N = V^2 - 1 = \frac{U^2 - 4}{3} \in \mathbb{N}$, rezultă $N > n$ și numerele $N + 1$ și $3N + 4$ sunt pătrate perfecte.

Astfel putem genera o infinitate de perechi de numere naturale de forma (u, v) cu $u^2 - 3v^2 = 1$, și corespunzător, o infinitate de numere naturale n care au proprietatea (1).

2. Dacă $ABCD$ este un dreptunghi înscris în cercul \mathcal{C} , atunci (A, C) și (B, D) sunt perechi de puncte diametral opuse.

Dacă n este impar, printre vârfurile poligonului $A_1 A_2 \dots A_n$ nu există puncte diametral opuse, deci nici unul dintre patrulaterelor cu vârfurile în A_1, A_2, \dots, A_n nu este dreptunghi, de unde $\max |M| = n$.

Dacă n este par, $n = 2k$, partiționăm vârfurile în k perechi de puncte diametral opuse: $\{A_1, A_{k+1}\}$, $\{A_2, A_{k+2}\}$, ..., $\{A_k, A_{2k}\}$. Impunem condiția ca mulțimea M să conțină cel mult o pereche de puncte diametral opuse; atunci $\max |M| = k + 1$. O mulțime care realizează maximumul este $\{A_1, A_2, \dots, A_{k+1}\}$.

3. Fie $a \in A$. Vom demonstra că dacă $\frac{b^{2n-1} + b^{2n}}{a^{2n-1}} \in \mathbb{N}$ și $\frac{a^{2n} + a^{2n+1}}{b^{2n}} \in \mathbb{N}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = b$.

Afirmația este evident adevărată dacă $a = 1$, deoarece rezultă că $b^{2n} \mid 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $b = 1$.

Dacă $a \geq 2$, fie p un divisor prim al lui a . Pentru orice $n \geq 1$ rezultă că $p^{2n-1} \mid a^{2n-1}$ și, întrucât $a^{2n-1} \mid b^{2n-1}(b+1)$, obținem $p^{2n-1} \mid b^{2n-1}(b+1)$. În particular, rezultă $p \mid b$ sau $p \mid b+1$. Deoarece b și $b+1$ sunt prime între ele, presupunând că $p \mid b+1$, rezultă $p \nmid b$ și atunci $p^{2n-1} \mid b+1$ pentru orice $n \geq 1$, fals. În consecință, $p \mid b$.

Analog, dacă q este un divisor prim al lui b , rezultă $q^{2n} \mid b^{2n}$ și din relația $b^{2n} \mid a^{2n}(a+1)$, obținem $q^{2n} \mid a^{2n}(a+1)$, pentru orice $n \geq 1$, de unde, ținând cont că $(a, a+1) = 1$, rezultă $q \mid a$ sau $q \mid a+1$. Presupunerea $q \nmid a$ conduce la $q^{2n} \mid a+1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fals. Ca urmare, $q \mid a$.

În concluzie, a și b au aceiași divizori primi. Vom arăta că exponenții la care apare un număr prim p în descompunerea în factori ai lui a și respectiv b sunt egali. Fie α și β acești exponenți; atunci $p^\alpha \mid a$ și $p^\beta \mid b$. Știm că $p \nmid a+1$ și $p \nmid b+1$. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b^{(b+1)}}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a \mid b(b+1) \Rightarrow \alpha \leq \beta \\ \frac{a^2(a+1)}{b^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 \mid a^2(a+1) \Rightarrow 2\beta \leq 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

În concluzie, $a = b$, deci $A \subset B$.

4. Notăm cu E și F mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$ și cu R mijlocul segmentului $[EF]$. Patrulaterul $ENFQ$ este paralelogram, de unde rezultă că punctele Q, R, N sunt coliniare. Notând $\{G\} = VR \cap NG_4$, din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul VQR cu transversala $N - G - G_4$ rezultă

$$\frac{NR}{NQ} \cdot \frac{G_4Q}{G_4V} \cdot \frac{GV}{GR} = 1 \Rightarrow \frac{GV}{GR} = 4.$$

Analog, $EMFP$ este paralelogram, de unde rezultă că M, R, P sunt coliniare și, întrucât

$$\frac{MR}{MP} \cdot \frac{G_3P}{G_3V} \cdot \frac{GV}{GR} = 1,$$

din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul VRP rezultă că punctele M, G, G_3 sunt coliniare.

Analog se demonstrează că (O, G, G_2) și (P, G, G_1) sunt triplete de puncte coliniare, deci dreptele MG_3, NG_4, PG_1, QG_2 sunt concurente în G .

Clasa a IX-a

1. a) Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $(a^2 + bc)(b + c) \geq 4abc$, care se obține prin înmulțirea inegalităților

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \quad \text{și} \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}.$$

b) De la punctul a) rezultă $\frac{a^2}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right)$ și inegalitățile analoge. Sumând, avem:

$$\sum \frac{a^2}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right) \Leftrightarrow \frac{8}{3} \sum \frac{a^2}{a^2 + bc} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \right).$$

Notând $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$, este suficient să arătăm că

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 \geq \frac{2}{3} (x + y + z + xy + yz + zx), \quad \text{cu } xyz = 1.$$

Inegalitatea anterioară se scrie

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + 1) \geq 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z),$$

sau, echivalent,

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

2. Facem convenția $S_\emptyset = 0$. Mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ are 2^n submulțimi pe care le grupăm în două clase:

- cele care nu conțin pe 1, în număr de 2^{n-1} ;
- cele care conțin pe 1, în număr de 2^{n-1} .

O submulțime B din a doua clasă este de forma $B = \{1\} \cup A$, unde A este o submulțime din prima clasă. Pentru o astfel pereche (A, B) cu $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$ avem $B = \{1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$, de unde

$$\begin{aligned} S_A &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k-1} a_k, \\ S_B &= 1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k, \end{aligned}$$

deci $S_A + S_B = 1$. Ca urmare, $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} S_A = 2^{n-1}$.

3. a) Vom demonstra prin inducție că $a_n \notin \mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 2$. Numărul $a_2 = \sqrt{2}$ este irațional. Presupunem că $a_k \notin \mathbb{Q}$ ($k \geq 2$). Dacă $a_{k+1} \in \mathbb{Q}$, atunci din relația $a_k = a_{k+1}^2 - k^2$, ar rezulta $a_k \in \mathbb{Q}$, în contradicție cu presupunerea făcută. Prin urmare, $a_n \notin \mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 2$.

b) Numerele a_n sunt pozitive pentru orice $n \geq 1$ și

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + (n-1)^2} > \sqrt{(n-1)^2} = n-1.$$

Prin inducție matematică, se demonstrează că $a_n < n$, pentru orice $n \geq 2$. Într-adevăr, $a_2 = \sqrt{2} < 2$ și, presupunând $a_k < k$ pentru un $k \geq 2$, rezultă că

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + k^2} < \sqrt{k + k^2} < k + 1.$$

În concluzie, $n-1 < a_n < n$ și $[a_n] = n-1$ pentru orice $n \geq 2$.

Atunci, pentru orice $n \geq 3$, avem:

$$a_n^2 = a_{n-1} + (n-1)^2 \Rightarrow [a_n^2] = [a_{n-1} + (n-1)^2] = [a_{n-1}] + (n-1)^2 = n-2 + (n-1)^2 = n^2 - n - 1.$$

Rezultă

$$\sum_{k=1}^n [a_k^2] = 3 + \sum_{k=3}^n [a_k^2] = 3 + \sum_{k=3}^n (k^2 - k - 1) = \frac{n^3 - 4n + 9}{3}.$$

4. a) Fie BB' și DD' , $B' \in (CD)$, $D' \in (AB)$ bisectoarele unghiurilor B și D ale patrulaterului. Atunci $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ - 2m(\widehat{A})$, de unde rezultă că $m(\widehat{B'BA}) + m(\widehat{D'DC}) = 180^\circ - m(A) = m(\widehat{ADD'}) + m(\widehat{AD'D})$. Cum $\widehat{ADD'} \equiv \widehat{CDD'}$, obținem $\widehat{B'BA} \equiv \widehat{DD'A}$, adică $BB' \parallel DD'$.

b) Fie M, O, N respectiv mijloacele segmentelor $[PQ]$, $[AC]$ și $[RS]$. Din relațiile $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO}$ și $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CO}$, deducem că $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QC})$. Cum $[AP] \equiv [QC]$, considerând punctele $P' \in (AB)$ și $Q' \in (BC)$ astfel încât $[BP'] \equiv [AP]$ și $[BQ'] \equiv [CQ]$, rezultă că $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BP'} + \overrightarrow{BQ'})$, adică MO este paralelă cu dreapta BO' , unde O' este mijlocul segmentului $[P'Q']$. Cum $\triangle BP'Q'$ este isoscel, rezultă că BO' este de fapt bisectoarea unghiului \widehat{ABC} .

Analog, rezultă că ON este paralelă cu bisectoarea unghiului \widehat{ADC} și, folosind punctul a), rezultă că punctele M, O și N sunt coliniare.

Clasa a X-a

1. a) Pentru orice $a, b \in [0, 1]$ avem, conform inegalității C.B.S.:

$$\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)^2 \leq \left(a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2\right) \cdot \left((\sqrt{1-b^2})^2 + b^2\right) = 1,$$

deci $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \in [-1, 1]$. Evident, $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \geq 0$, deci $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \in [0, 1]$.

b) Dacă A are proprietatea (P), atunci $A \subset [0, 1]$. Presupunând $A \subset \mathbb{Q}$ și $a \in A$; atunci, pentru $b := a$, rezultă că $2a\sqrt{1-a^2} \in A \subset \mathbb{Q}$. Cum $a \neq 0$, atunci $\sqrt{1-a^2} \in \mathbb{Q}$, adică există $b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ (deoarece $a \neq 1$) astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Fie $b = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$; din $a^2 + b^2 = 1$, rezultă că

$$\frac{m^2}{n^2} + \frac{p^2}{q^2} = 1 \Leftrightarrow m^2q^2 + p^2n^2 = n^2q^2.$$

Atunci $n^2 \mid (m^2q^2 + p^2n^2) \Rightarrow n^2 \mid m^2q^2$ și cum $(n, m) = 1 \Rightarrow n^2 \mid q^2 \Rightarrow n \mid q$. Analog, $q \mid n$, deci $q = n$. Ca urmare, $m^2 + p^2 = n^2$, deci p, m, n sunt laturile unui triunghi dreptunghic.

c) Întrucât $A \subset [0, 1]$, pentru orice $a \in A$, există $x_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $a = \sin x_a$. Dacă $a = \sin x_a$ și $b = \sin x_b$, atunci

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = \sin x_a \cos x_b + \sin x_b \cos x_a = \sin(x_a + x_b).$$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$; atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = n + 1$. Considerăm mulțimea $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, unde $a_k = \sin \frac{k\pi}{2n}$, pentru orice $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Atunci A are $n + 1$ elemente și pentru orice $k, j \in \overline{0, n}$ avem:

$$a_k \sqrt{1 - a_j^2} + a_j \sqrt{1 - a_k^2} = \sin \frac{(k+j)\pi}{2n} = \begin{cases} a_{k+j} & \text{dacă } 0 \leq k+j \leq n \\ a_{2n-(k+j)} & \text{dacă } n < k+j \leq 2n \end{cases},$$

deci A are proprietatea **(P)**.

2. Arătăm că răspunsul este negativ.

Într-adevăr, presupunând că răspunsul ar fi afirmativ, atunci, din relația $(f \circ g)(x) = x^{2m+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ar rezulta că g este injectivă. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$g((f \circ g)(x)) = (g \circ f)(g(x)) \Rightarrow g(x^{2m+1}) = (g(x))^{2n+2}.$$

Pentru $x \in \{-1, 0, 1\}$ obținem

$$g(0) = (g(0))^{2n+2}, \quad g(1) = (g(1))^{2n+2}, \quad g(-1) = (g(-1))^{2n+2},$$

deci $g(0), g(1), g(-1) \in \{0, 1\}$. Ca urmare, numerele $g(0), g(1), g(-1)$ nu pot fi toate distincte, contradicție cu injectivitatea funcției g .

3. Din condițiile de existență ale logaritmilor, deducem că $x, y, z > 1$. Sistemul se poate scrie sub forma:

$$\begin{cases} y = 4^{\log_{12}(x^2-x)} \\ z = 4^{\log_{12}(y^2-y)} \\ x = 4^{\log_{12}(z^2-z)} \end{cases}.$$

Considerând funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4^{\log_{12}(x^2-x)}$, rezultă $y = f(x)$, $z = f(y)$ și $x = f(z)$. Deoarece funcția $x \mapsto x^2 - x$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$, rezultă că f este strict crescătoare, fiind compunere de funcții strict crescătoare.

Din motive de simetrie, putem presupune $x \leq y \leq z$, fără a pierde generalitatea. Obținem $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, adică $y \leq z \leq x$, de unde $x = y = z$.

Rămâne să rezolvăm ecuația $\log_{12}(x^2 - x) = \log_4 x$. Notând $t = \log_4 x$, obținem $x = 4^t$ și $x^2 - x = 12^t$, de unde rezultă ecuația $16^t - 4^t = 12^t$, cu soluția unică $t = 1$. Prin urmare, sistemul are soluția $x = y = z = 4$.

4. Din enunț știm că

$$xf(-x, y) + yf(x, -y) = (x - y)^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (1)$$

Atunci

$$x \mapsto -x \stackrel{(1)}{\Rightarrow} -xf(x, y) + yf(-x, -y) = (x + y)^2 \quad (2)$$

și

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto -x \\ y \mapsto -y \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} xf(-x, -y) - yf(x, y) = (x + y)^2. \quad (3)$$

Prin scădere, obținem:

$$(x - y)(f(x, y) + f(-x, -y)) = 0 \Rightarrow f(-x, -y) = -f(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y.$$

Din (2) rezultă și

$$(-x - y)f(x, y) = (x + y)^2 \Rightarrow f(x, y) = -(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pm y.$$

Pentru $y = x$, din relația (1) obținem:

$$x(f(-x, x) + f(x, -x)) = 0 \Rightarrow f(-x, x) = -f(x, -x), \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x, -x) = \begin{cases} h(x), & \text{dacă } x \geq 0 \\ -h(-x), & \text{dacă } x < 0 \end{cases},$$

unde $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție arbitrară.

La fel, pentru $y = -x$, din relația (1) obținem:

$$x(f(-x, -x) - f(x, x)) = 4x^2 \Rightarrow f(-x, -x) = 4x + f(x, x), \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x, x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x > 0 \\ -4x + g(-x), & \text{dacă } x < 0 \end{cases},$$

unde $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție arbitrară.

În concluzie,

$$f(x, y) = \begin{cases} -x - y & \text{dacă } x \neq \pm y \\ g(x) & \text{dacă } x = y > 0 \\ -4x + g(-x) & \text{dacă } x = y < 0 \\ h(x) & \text{dacă } x = -y \geq 0 \\ -h(-x) & \text{dacă } x = -y < 0 \end{cases}.$$

Clasa a XI-a

1. Fie $\sigma(1) = i$, $\sigma(i) = j$; atunci $\sigma(j) = 2$.

- dacă $i = 1 \Rightarrow \sigma(\sigma(\sigma(1))) = 1$, contradicție.

- dacă $i = 2$, atunci $\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = j \\ \sigma(j) = 2 \end{cases} \Rightarrow j = 1 \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ 2 & 1 & \sigma(3) & \dots & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ și există $(n-2)!$ astfel de permutări.

- dacă $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ atunci:

- dacă $j = 1$ rezultă $\begin{cases} \sigma(1) = i \\ \sigma(i) = 1 \\ \sigma(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 2$, contradicție.
- dacă $j = 2$ rezultă $\begin{cases} \sigma(1) = i \\ \sigma(i) = 2 \\ \sigma(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 2$, contradicție.
- dacă $j = i$ rezultă $\begin{cases} \sigma(1) = i \\ \sigma(i) = i \\ \sigma(i) = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 2$ și $\sigma(1) = \sigma(2) = 2$, contradicție.

Așadar $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, 2, i\}$, deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ i & \dots & j & \dots & 2 & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Deoarece i poate lua $n-2$ valori, j poate lua $n-3$ valori și numerele $\sigma(k)$, $k \neq 1, i, j$ pot fi alese în $(n-3)!$ moduri, numărul permutărilor de acest tip este $(n-2) \times (n-3) \times (n-3)! = (n-3) \cdot (n-2)!$.

În concluzie, există $(n-2)! + (n-2) \cdot (n-2)! = (n-2) \cdot (n-2)!$ permutări ca în enunț.

2. a) Pentru orice $i = \overline{1, n}$ avem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \Rightarrow AU = U, \quad \text{unde } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prin inducție rezultă $A^k U = U$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ și notând $A^k = B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ obținem $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 1$, \forall

$i = \overline{1, n}$, și atunci

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

b) Dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$, atunci există o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = \lambda X$, relație echivalentă cu

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Fie $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Pentru orice $i = \overline{1, n}$ avem:

$$|\lambda| \cdot |x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot |x_j| \leq |x_p| \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} = |x_p|,$$

de unde, pentru $i = p$, rezultă $|\lambda| \cdot |x_p| \leq |x_p|$. Cum $x_p \neq 0$, rezultă $|\lambda| \leq 1$.

3. a) Observăm că $a_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$ și $a_1 > a_2 = 1$. Pentru orice $n \geq 1$ avem:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + 1}{a_n + n} = \frac{a_n^2 + (n-1)a_n - 1}{a_n + n}$$

și

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \geq \frac{1}{n-1} \quad (\text{pentru } n \geq 2),$$

deci $a_n - a_{n+1} \geq \frac{a_n^2}{a_n + n} > 0$, oricare ar fi $n \geq 2$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

Fiind strict descrescător și mărginit inferior de 0, șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Prin trecere la limită în relația de recurență se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Vom demonstra prin inducție că $a_n < \frac{1}{n-2}$, pentru orice $n \geq 3$.

Inegalitatea are loc pentru $n = 3$, întrucât $a_3 = \frac{2}{3} < 1$.

Presupunem că $a_k < \frac{1}{k-2}$ ($k \geq 3$) și avem:

$$\frac{1}{k-1} - a_{k+1} = \frac{1 - (k-2)a_k}{(k-1)(a_k + k)} > 0 \Rightarrow a_{k+1} < \frac{1}{k-1}.$$

Ca urmare, pentru orice $n \geq 3$ avem:

$$\frac{1}{n-1} \leq a_n < \frac{1}{n-2} \Rightarrow \frac{n}{n-1} \leq na_n < \frac{n}{n-2}.$$

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$.

4. Notând $x_n = \frac{1}{2} - \frac{a_n}{1 + a_n^2}$, rezultă că

$$x_n \rightarrow 0 \text{ și } (a_n - 1)^2 = 2x_n(1 + a_n^2), \text{ pentru orice } n \geq 1. \quad (1)$$

Vom demonstra că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Presupunând că $(a_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit superior, atunci, pentru orice număr natural $n \geq 1$, există $k_n \geq 1$ astfel încât $a_{k_n} > n$ și $k_n < k_{n+1}$. Rezultă că $a_{k_n} \rightarrow \infty$ și

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{k_n}}{1 + a_{k_n}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_{k_n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{k_n}^2}} \right) = 0,$$

contradicție. Deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior.

Analog se demonstrează că $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Ca urmare, există $M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 1$.

Din relația (1) deducem că

$$|a_n - 1| = \sqrt{2x_n(1 + a_n^2)} \leq \sqrt{2(1 + M^2) \cdot x_n} \rightarrow 0, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Clasa a XII-a

1. Fie e elementul neutru al grupului (F, \circ) . Vom arăta că mulțimea $B = e(A)$ satisface condițiile date.

În primul rând observăm că, pentru $b = e(a) \in B$, avem $e(b) = e(e(a)) = (e \circ e)(a) = e(a) = b$, deci $e|_B = \mathbf{1}_B$; în plus $e(x) = x$ dacă și numai dacă $x \in B$.

- Pentru orice $f \in F$ și orice $x \in A$ avem $f(x) = (e \circ f)(x) = e(f(x))$, deci $f(x) \in B$. Așadar $\text{Im } f \subset B$.
- Dacă \bar{f} este simetrica lui f în (F, \circ) și $x \in B$, atunci

$$(f_B \circ \bar{f}_B)(x) = (\bar{f}_B \circ f_B)(x) = e|_B(x) = x = \mathbf{1}_B(x),$$

deci f_B este inversabilă și, ca urmare, bijectivă.

- În final, dacă $x, y \in A$ și există $f_0 \in F$ astfel încât $f_0(x) = f_0(y)$, atunci $f_0(e(x)) = f_0(e(y))$. Cum $e(x)$ și $e(y)$ sunt elemente din B și $f_0|_B$ este bijectivă, rezultă $e(x) = e(y)$, de unde

$$f(x) = (f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(e(y)) = (f \circ e)(y) = f(y)$$

pentru orice $f \in F$.

2. Pentru $x \in G$, notăm $C(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$ (centralizatorul lui x). Din enunț, $C(a)$ și $C(b)$ sunt finite, nevide (deoarece $e \in C(x)$, pentru orice $x \in G$) și $|C(a)| + |C(b)| = p \geq 2$, p prim. Trebuie să aflăm numărul elementelor mulțimii

$$\{y \in G \mid ay = ya \text{ și } by = yb\} = C(a) \cap C(b).$$

Deoarece $C(a)$ și $C(b)$ sunt subgrupuri în G , atunci și $C(a) \cap C(b)$ este subgrup în G . Din teorema Lagrange rezultă

$$\text{ord}(C(a) \cap C(b)) \mid \text{ord } C(a) \text{ și } \text{ord}(C(a) \cap C(b)) \mid \text{ord } C(b),$$

deci $\text{ord}(C(a) \cap C(b)) \mid \text{ord } C(a) + \text{ord } C(b) = p$.

În plus, $|C(a) \cap C(b)| \leq |C(a)| < |C(a)| + |C(b)|$, de unde $|C(a) \cap C(b)| < p$. Ca urmare, $|C(a) \cap C(b)| = 1$, adică singurul element care comută și cu a și cu b este e .

3. Pentru orice $x \in (0, \infty)$ avem $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ și

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x^2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{\arctg \frac{1}{x^2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \arctg x + \int \frac{\arctg \frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right)' dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \arctg x + F\left(\frac{1}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

Întrucât funcția $x \mapsto \frac{\pi}{2} \arctg x + F\left(\frac{1}{x}\right)$ este o primitivă pe $(0, \infty)$ a funcției f , rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \arctg x + F\left(\frac{1}{x}\right) + c,$$

pentru orice $x > 0$. Pentru $x = 1$, din egalitatea precedentă rezultă că $c = -\frac{\pi^2}{8}$, deci

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \arctg x + F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi^2}{8}, \quad \forall x > 0.$$

Ca urmare, trecând la limită $x \rightarrow \infty$, avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{\pi^2}{4} + F(0) - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Fie $T > 0$ o perioadă a lui f . Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem:

$$(F(x+T) - F(x))' = f(x+T) - f(x) = 0,$$

deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x+T) - F(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ (de fapt, $c = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t) dt$).

Funcția $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x) = F(x) - \frac{c}{T}x$ este derivabilă și periodică, o perioadă a sa fiind T . Deoarece $\Phi(\mathbb{R}) = \Phi([0, T])$ și $\Phi|_{[0, T]}$ este continuă, rezultă că Φ este funcție mărginită. Fie $M = \sup |\Phi(x)|$; atunci $0 \leq \Phi(x) + M \leq 2M$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru orice număr natural $n \geq 1$ avem:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2} + \frac{c}{T} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Arătăm că șirul $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2}\right)_{n \geq 1}$ este convergent, observând mai întâi că

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k) + M}{k^2} - M \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Șirul $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \geq 1}$ este convergent, fiind strict crescător și mărginit superior de 2; la fel, șirul $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)+M}{k^2}\right)_{n \geq 1}$ este crescător și mărginit superior de $4M$, deci convergent. Prin urmare, șirul $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2}\right)_{n \geq 1}$ este convergent.

Întrucât $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$, deducem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă $c = 0$, echivalent cu $F(x+T) - F(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică F este periodică.