

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a V-a

1. Să se determine toate numerele naturale care împărțite la 13 dau câtul  $c$  și restul  $r$  și împărțite la 11 dau câtul  $r$  și restul  $c$ .

*Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. Pentru a duce cadouri copiilor dintr-un sat, Moș Crăciun merge pe un drum de-a lungul căruia locuiesc spiridușii. La primele trei case – numerotate de la 1 la 3 – locuiesc spiriduși buni, care îi dau lui Moș Crăciun un număr de cadouri egal cu numărul casei; la cea de-a patra casă locuiește un spiriduș rău, care îi cere lui Moș Crăciun un număr de cadouri egal cu numărul casei. La următoarele trei case – numerotate de la 5 la 7 – locuiesc de asemenea spiriduși buni, care îi dau lui Moș Crăciun un număr de cadouri egal cu numărul casei; la cea de-a opta casă locuiește un spiriduș rău, care îi cere lui Moș Crăciun un număr de cadouri egal cu numărul casei și așa mai departe, până la casa cu numărul 2005. Aflați numărul de cadouri pe care le poate oferi Moș Crăciun copiilor.

*Emil Ciolan, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

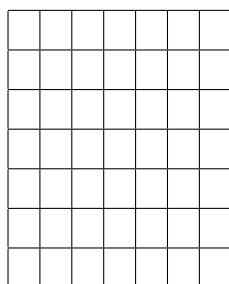
3. Fie numărul  $A = 101001000100001\dots$ .

a) Dacă cifra 1 apare scrisă de 2005 ori în  $A$ , de câte ori apare cifra 0?

b) De câte ori apare cifra 0 în scrierea numărului  $A$ , dacă acesta are 2005 cifre?

*Marius Perianu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

4. Străzile unui orașel sunt ca în figura alăturată (sunt 8 străzi orizontale și 8 verticale, iar intersecțiile străzilor sunt vârfurile pătrățelelor):



În câte moduri se pot așeza opt copii la intersecțiile străzilor astfel încât oricare doi dintre ei să nu se vadă? (Se consideră că doi copii se văd dacă sunt așezați pe aceeași stradă – verticală sau orizontală.)

*Eduard Buzdugan, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect  $i$  se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a VI-a

1. Să se determine numerele naturale  $\overline{abc}$ ,  $a \neq 0$ , care îndeplinesc condiția:

$$\overline{abc} = a + 5b + 5^2c.$$

*Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. Se scriu numerele naturale de la 1 la 2002, unul după altul, obținându-se numărul

$$A = 123456\dots20012002.$$

Să se determine restul împărțirii lui  $A$  la 15.

*Emil Ciolan, George Mihai, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

3. Să se determine toate numerele prime  $p$  pentru care  $2^p + p^2$  este număr prim.

*Aurel Chiriță, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

4. Se consideră unghiurile  $\widehat{A_0OA_1}$ ,  $\widehat{A_1OA_2}$ , ...,  $\widehat{A_{n-1}OA_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ), cu interioarele disjuncte două câte două și suma măsurilor  $180^\circ$ , astfel încât:

$$m(\widehat{A_1OA_2}) = 2m(\widehat{A_0OA_1})$$

$$m(\widehat{A_2OA_3}) = 2m(\widehat{A_1OA_2})$$

.....

$$m(\widehat{A_{n-1}OA_n}) = 2m(\widehat{A_{n-2}OA_{n-1}}).$$

Să se determine  $n$  și măsura unghiului  $\widehat{A_0OA_1}$ , știind că este exprimată printr-un număr natural.

*Florian Dumitrel, Marius Perianu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect  $i$  se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

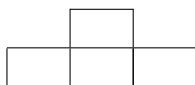
EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a VII-a

1. Să se demonstreze că nu există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $225n - 4$  să fie produsul a două numere naturale consecutive.

*Mircea Popescu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. Să se afle numerele naturale  $n$  astfel încât o tablă de șah  $n \times n$  să poată fi acoperită cu piese de forma



care să nu se suprapună.

*Marius Perianu, Emil Ciolan, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

3. Fie  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  mijloacele laturilor  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$  ale unui triunghi  $ABC$  și  $I$  intersecția bisectoarelor triunghiului. Să se demonstreze că segmentele  $[IA']$ ,  $[IB']$ ,  $[IC']$  pot fi laturile unui triunghi.

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

4. Pe laturile unui pătrat  $ABCD$  se consideră punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$ ,  $P \in (CD)$  și  $Q \in (DA)$  astfel încât:

$$m(\widehat{ABQ}) = m(\widehat{BCM}) = m(\widehat{CDN}) = m(\widehat{DAP}) = 15^\circ.$$

Notăm  $\{E\} = BQ \cap CM$ ,  $\{F\} = CM \cap DN$ ,  $\{G\} = DN \cap AP$  și  $\{H\} = AP \cap BQ$ .

a) Arătați că  $EFGH$  este pătrat.

b) Să se exprime aria pătratului  $EFGH$  în funcție de aria pătratului  $ABCD$ .

*Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a VIII-a

1. a) Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a + b = 2$ , să se arate că

$$\sqrt{a^2 + 8b} + \sqrt{b^2 + 8a} \geq |a - b|.$$

b) Găsiți perechile  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  pentru care  $\sqrt{m^2 + 8n}$  și  $\sqrt{n^2 + 8m}$  sunt simultan numere raționale.

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. Fie  $n, k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n^5 \geq 11k + 2$ . Să se arate că  $n^5 \geq 11k + 10$ .

*Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

3. Fie  $A', B', C'$  mijloacele laturilor  $[BC], [CA], [AB]$  ale unui triunghi  $ABC$  și  $I$  intersecția bisectoarelor triunghiului.

a) Să se demonstreze că  $I$  se află în interiorul triunghiului  $A'B'C'$ .

b) Dacă  $\{A_1\} = IA \cap B'C', \{B_1\} = IB \cap C'A', \{C_1\} = IC \cap A'B'$ , să se arate că dreptele  $A'A_1, B'B_1$  și  $C'C_1$  sunt concurente.

4. Fie  $ABCD$  un tetraedru și punctele  $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$ . Să se arate că cel mult două din dreptele  $MN, NP, PQ$  și  $QM$  pot trece simultan prin centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC, BCD, CDA$  respectiv  $DAB$ . Arătați că este posibil ca exact două dintre dreptele date să treacă prin centrele de greutate menționate.

*Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a IX-a

1. Fie  $A$  o mulțime infinită de numere naturale nenule, cu proprietatea:

$$\forall x, y \in A, x > y \Rightarrow x - y \in A.$$

Să se demonstreze că există  $a \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A = \{ma \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ .

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. Fie  $M$  mijlocul laturii  $[BC]$  a unui triunghi  $ABC$ . Notăm cu  $I$  și  $J$  centrele cercurilor înscrise în triunghiurile  $ABM$  respectiv  $ACM$ . Dacă  $m(\widehat{AIB}) - m(\widehat{MIJ}) = 90^\circ$ , să se demonstreze că  $[AB] \equiv [AC]$ .

*Florian Dumitrel, Marius Perianu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

3. Fie  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , fixat. Să se determine  $a \in \mathbb{R}^*$  astfel încât

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{a} \right] + \left[ x + \frac{2}{a} \right] + \dots + \left[ x + \frac{p-1}{a} \right] = [ax], \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Marius Perianu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

4. Fie triunghiul  $ABC$  de ortocentru  $H$  și  $A_1, B_1, C_1$  simetricele lui  $H$  față de mijloacele laturilor  $[BC], [CA], [AB]$ . Notăm cu  $H_a, H_b, H_c$  ortocentrele triunghiurilor  $A_1BC, AB_1C$  respectiv  $ABC_1$ . Să se arate că dreptele  $AH_a, BH_b$  și  $CH_c$  sunt concurente în centrul de greutate  $G$  al triunghiului  $ABC$ .

*Marius Perianu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect  $i$  se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a X-a

1. Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$  distincte și  $n \in \mathbb{N}$ . Să se compare numerele  $A = a^n b + b^n c + c^n a$  și  $B = abc(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2})$ .

*George Mihai, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. a) Dacă  $a, b$  sunt numere iraționale pozitive, rezultă că  $a^b$  este irațional?  
b) Determinați funcțiile  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  cu proprietatea

$$\log_{n+1} f(n) = \log_{f(n+2)}(n+3), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

*Marius Ghergu, C.N.V. „N. Titulescu“ Slatina*

3. Fie  $k, n \geq 3$  două numere naturale impare și  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \text{ și } x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 0.$$

Arătați că  $\min_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j < -\frac{1}{n}$ .

*Marius Ghergu, C.N.V. „N. Titulescu“ Slatina*

4. Fie  $ABCD$  un pătrat de latură  $a$  și

$$\mathcal{D} = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA].$$

Pentru fiecare punct  $M \in \mathcal{D}$ , notăm cu  $P$  și  $Q$  punctele în care perpendiculara în  $O$  pe  $OM$  intersectează  $\mathcal{D}$ , unde  $O$  este centrul pătratului. Să se determine imaginea funcției  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(M) = PQ$ .

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a XI-a

1. Pe o tablă de șah  $m \times m$  se plasează aleatoriu doi nebuni, unul alb și unul negru. Care este probabilitatea ca ei să se atace?

*Mihai Grigore – Slatina, Octavian Mara – Timișoara*

2. Fie  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^3 = 4I_n - 3A$ . Să se demonstreze că

$$\det(A + I_n) = 2^n.$$

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere strict pozitive cu proprietatea

$$a_{n-1} \leq (a_{n+2} - a_n)^n \leq a_{n+1}, (\forall) n \geq 2.$$

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - n)$ .

*Marius Ghergu, C.N.V. „N. Titulescu“ Slatina*

4. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale pozitive convergent la 1. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + ka_n}.$$

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

# CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a  
SLATINA – 26 noiembrie 2005

## Clasa a XII-a

1. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1 + 3 \cos^2 x}$  și  $F$  o primitivă a sa. Să se calculeze  $F(\pi) - F(0)$ .

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

2. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât aplicațiile  $f, g : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^n$ ,  $g(x) = x^{n+1}$  sunt morfisme de grup. Dacă în plus  $f$  este surjectivă, atunci  $(G, \cdot)$  este grup abelian.

3. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  și  $F$  primitiva sa care se anulează în origine.

a) Să se demonstreze că pentru fiecare număr natural  $n \geq 1$  ecuația  $F(x) = \frac{1}{n}$  are o unică soluție reală  $x_n$ .

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+p})$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .

*Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina*

4. Fie  $G$  un grup de ordin impar în care mai mult de o treime din elementele lui  $G$  comută între ele. Să se arate că  $G$  este abelian.

### NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.