CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIŢIA I

SLATINA – 27 noiembrie 2004

Clasa a VII-a

1. Pe latura $[AB]$ a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E şi F, astfel încât $(AE) \equiv (EF) \equiv (FB)$.

Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ şi $DE \cap CF = \{M\}$, să se arate că $OM \| BC$.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

2. Să se arate că există un număr format numai cu cifra 1 care se împarte exact la 109. Să se afle ultimele 5 cifre ale câtului împărţirii unui astfel de număr la 109.

prof. Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

3. Determinaţi numerele naturale x, y, z şi n dacă:

$$x(x-y) + y(y-z) + z(z-x) = 2004^n - 1.$$

prof. Marius Ghergu, C.N.V. „N. Titulescu“ Slatina

4. a) Fie $[AB]$ un segment. Să se determine mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea $MA < MB$.

b) Fie $ABCD$ un dreptunghi şi $\{O\} = AC \cap BD$. Să se demonstreze că mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea

$$OM < \min(AM, BM, CM, DM)$$

este interiorul unui romb.

prof. Mircea Popescu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIŢIA I

SLATINA – 27 noiembrie 2004

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că există o infinitate de numere iraţionale α pentru care $\alpha^2 - 6\alpha + 10 \in \mathbb{Z}$.

prof. Mircea Popescu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

2. Se consideră şirul de numere raţionale:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}; \ldots \quad .$$

a) Aflaţi fracţia de pe locul 1000.
b) Să se calculeze suma primelor 1000 de numere ale şirului.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

3. Determinaţi $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{a^3 + b}{b^3 - 3a}$ şi $\dfrac{b^3 + a}{a^3 - 3b}$ să fie numere întregi.

prof. Marius Ghergu, C.N.V. „N. Titulescu“ Slatina

4. Fie punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât

$$AC + BD = CD.$$

Dacă bisectoarea unghiului $\widehat{ACD}$ intersectează AD în E iar P este proiecţia punctului B pe bisectoarea unghiului $\widehat{BDC}$ şi $\{F\} = CP \cap BD$, să se arate că $EF \| (ABC)$.

* * *

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIŢIA I

SLATINA – 27 noiembrie 2004

Clasa a IX-a

1. Să se determine perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât ecuaţia

$$|x-1| + |x-a| + |x-b| = 1$$

să aibă o singură soluţie reală.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

2. Să se determine numerele reale a pentru care:

$$[x] + [x+a] + [x+2a] + ... + [x+(n-1)\,a] = [nx]\,,\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

prof. Marius Perianu, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

3. Dacă m şi n sunt numere naturale, $n \geq 2$, atunci

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + ... + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2},$$

unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

* * *

4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul H, iar A_1, B_1, C_1 punctele de intersecţie ale înălţimilor triunghiului cu cercul cercumscris.

a) Dacă A', B', C' sunt proiecţiile vârfurilor triunghiului pe laturile opuse, să se arate că laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt paralele cu laturile triunghiului $A_1B_1C_1$.

b) Dacă $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$, să se arate că:

$$a_1\overrightarrow{HA_1} + b_1\overrightarrow{HB_1} + c_1\overrightarrow{HC_1} = \overrightarrow{0}\,.$$

prof. Gheorghe Duţă, C.N. „R. Greceanu“ Slatina

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIŢIA I

SLATINA – 27 noiembrie 2004

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + 7^x = y^3 \\ x^2 + 3 = 2^y \end{cases}.$$

prof. Eduard Buzdugan, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos^2 \frac{(x-2)\pi}{4} + \cos \frac{(x-2)\pi}{3} - \log_3 \left(x^2 - 4x + 6\right) = 0.$$

prof. Gheorghe Mihai, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

3. Dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$ şi

$$|a| = |b| = |c| = \left| \frac{a+b+c-abc}{ab+bc+ca-1} \right| = r > 0,$$

atunci $r = 1$ sau două dintre numerele a, b, c sunt opuse.

prof. Costel Anghel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă f este monotonă pe un interval propriu $I \subset \mathbb{R}$, să se demonstreze că f este monotonă pe $\mathbb{R}$.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIŢIA I

SLATINA – 27 noiembrie 2004

Clasa a XI-a

1. Fie şirul cu termenul general

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{x_{n+1}} - e^{x_n}\right)$.

***

2. Fie $a_1 = 1$ şi $a_n = \sqrt[n]{1 + na_{n-1}}$ pentru $n \geq 2$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se determine limita sa.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$X^3 + X + 2I_2 = 0_2,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ numerele $\det(A + X)$, $\det(A^2 + X^2)$, $\det(A^3 + X^3)$ sunt, în această ordine, în progresie geometrică. Arătaţi că $A = 0_2$.

prof. Marius Ghergu, C.N.V. „N. Titulescu“ Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIŢIA I

SLATINA – 27 noiembrie 2004

Clasa a XII-a

1. a) Să se demonstreze că mulţimea

$$M = \left\{ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulţirea numerelor întregi.

***

b) Dacă $(G, \cdot)$ este grup şi $a, b \in G$ astfel încât $a^3 b = ba^2$ şi $a^2 b = ba^3$, atunci $a^5 = e$, unde e este elementul neutru al grupului G.

prof. Gabriel Tica, Lic. „M. Viteazul“ Băileşti

2. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are primitive mărginite, atunci funcţia

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit care are un endomorfism f cu un singur punct fix.

a) Să se arate că funcţia $g : G \to G$, $g(x) = x^{-1} f(x)$ este bijectivă.

b) Dacă, în plus, $f \circ f = \mathbf{1}_G$ să se demonstreze că G este grup abelian.

***

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există $F \in \displaystyle\int f(x)\,dx$ astfel încât $f(x) > F(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$.

prof. Florian Dumitrel, C.N. „I. Minulescu“ Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.