CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a IV-a, 1 decembrie 2007

ziua 2 – secţiunea "Ion Minulescu"

Clasa a XII-a

1. Fie $G = \{(u,v) \mid u,v \in \mathbb{C},\ u \neq 0\}$ şi $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ o funcţie cu proprietatea că legea de compoziţie " $\circ$ " definită pe K prin

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac, bc + d\varphi(a))$$

este asociativă.

a) Să se demonstreze că $(G, \circ)$ este grup.

b) Să se determine funcţia φ pentru care $(G, \circ)$ este grup abelian.

Marius Perianu

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$ şi F primitiva sa care se anulează în origine.

a) Să se arate că $F(-1) + F(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Definim şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ prin $a_0 > 0$ şi $a_{n+1} = F(a_n)$, pentru $n \geq 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{\sqrt{a_{k+1}}}$.

Florian Dumitrel

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^2$.

a) Să se arate că f admite primitive mărginite pe $\mathbb{R}$.

b) Fie F o primitivă a lui f cu proprietatea că $F(0) = 0$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ prin $a_0 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = a_n - F(a_n)$, $n \geq 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$.

Florian Dumitrel

4. Fie p un număr prim şi $a \geq 2$ un număr natural. Să se demonstreze că numărul $\varphi(a^p + 1)$ se divide cu p.

Cristinel Mortici

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se redactează pe o coală separată.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.