CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a IV-a, 1 decembrie 2007

ziua 2 – secţiunea "Ion Minulescu"

Clasa a XI-a

1. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^2 = 0$. Să se demonstreze că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^3 = \lambda A$ sau există $\mu \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^3 = \mu I_3$.

Cristinel Mortici

2. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, \quad a_{n+1} = a_n e^{-a_n},\ n \geq 0, \\ b_0 &\in (0,1), \quad b_{n+1} = b_n \cos\sqrt{b_n},\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Florian Dumitrel

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit astfel: $a_0 > 0$ şi $a_n = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{n}$, pentru orice $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n$.

Florian Dumitrel

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ şi numerele reale nenule $a_1, a_2, ..., a_n$, diferite în modul două câte două. Determinaţi permutarea $\sigma \in S_n$ cu proprietatea

$$a_i \cdot a_j \leq a_{\sigma(i)} \cdot a_{\sigma(j)},\ \text{pentru orice } i, j \in \{1, 2, ..., n\},\ i \neq j.$$

Teodor Radu

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se redactează pe o coală separată.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.