CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a IV-a, 30 noiembrie 2007

ziua 1 – secţiunea "Radu Greceanu"

Clasa a X-a

1. Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\omega| \neq 1$. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + \omega\overline{z}$ este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.

2. Să se rezolve ecuaţia $\cos(\pi \log_3(x+6)) \cdot \cos(\pi \log_3(x-2)) = 1$.

3. Să se arate că pentru orice $a, b, c \in (1, \infty)$ are loc inegalitatea

$$\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b \geq \log_{a^2bc} bc + \log_{ab^2c} ac + \log_{abc^2} ab.$$

Costel Anghel

4. Fie mulţimile:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{L} &= \{g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_a(x) = ax,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ştiind că $\mathcal{C} \setminus \mathcal{L}$ este o mulţime nevidă, să se arate că pentru orice $T \in \mathbb{R}^*$, există o funcţie nenulă $f \in \mathcal{C}$, periodică, de perioadă T.

Marin Toloşi

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se redactează pe o coală separată.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.