Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2008

EDIŢIA a V-a SLATINA – 28 – 29 noiembrie 2008

Clasa a IV-a

1. a) Câte semne „+“ sunt în egalitatea $3 + 3 + 3 + ... + 3 = 213$?
b) Numerele naturale a, b, c sunt consecutive, iar produsul lor este 990. Aflaţi numărul b.
c) Scrieţi numerele naturale a, b, c şi d în ordine descrescătoare, ştiind că

$$a - 8 = b + 7 = c - 7 = d + 8.$$

2. Calculaţi:
a) $99996 : 3$.
b) $(1\,000\,000 - 4) : 3$.
c) $\left(\underbrace{1\,00...0}_{100 \text{ cifre de } 0} - 4\right) : 3$.

3. Cristi şi Mircea sunt prieteni. Mircea are o bicicletă. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 2 ciocolate, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 3 ore. Dacă Cristi îi dă lui Mircea 28 de caramele, atunci Mircea îi împrumută bicicleta lui Cristi timp de 2 ore. Aflaţi pentru cât timp va primi Cristi bicicleta lui Mircea în cazul în care Cristi îi oferă lui Mircea o ciocolată şi 7 caramele.

4. Fie $N = 123456789101112...$ (se "lipesc" numerele naturale în ordine crescătoare începând de la 1). Care este cifra de pe poziţia 20008?

Clasa a V-a

1. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}.$$

Florian Dumitrel

2. Suma a 10 numere naturale este 2008. Împărţind fiecare dintre aceste numere la numărul natural n, obţinem resturi egale cu 2 sau cu 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 27.
a) Câte resturi, dintre cele 10, sunt egale cu 2?
b) Determinaţi cel mai mic număr n care satisface condiţiile din enunţ.

Florica Banu

3. Mulţimea $A = \{a, b, c, d, e\}$ are următoarele proprietăţi:
a) Media aritmetică a elementelor mulţimii A este egală cu 2008.
b) Dacă eliminăm cel mai mic element al mulţimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2010.
c) Dacă eliminăm cel mai mare element al mulţimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2006.
Determinaţi numărul de mulţimi A care au aceste proprietăţi.

Mircea Fianu

4. O pereche de numere naturale (m, n) se numeşte *interesantă* dacă atunci când calculăm suma $m + n$ nu au loc treceri peste ordin. De exemplu: o pereche *interesantă* cu suma 76 este $(22, 54)$ iar o pereche cu suma 76 care nu este *interesantă* este $(49, 27)$.
Să se calculeze numărul perechilor *interesante* cu suma 2793.

Marius Perianu

Clasa a VI-a

1. a) Să se determine care pot fi ultimele două cifre ale sumei a 75 de numere naturale consecutive.
b) Patru numere naturale nenule au proprietatea că media aritmetică a oricăror trei este divizibilă cu al patrulea. Să se demonstreze că numerele sunt egale.

Costel Anghel, Marius Perianu

2. Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că suma resturilor obţinute prin împărţirea la 10, 11, 12, ..., 19 este egală cu 135.

Emil Ciolan

3. Fie $a = 2008! + 2007! + ... + 3! + 2!$, unde pentru $n \in \mathbb{N}^*$ am notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ şi $\overline{a_1a_2a_3...a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10. Dacă

$$s = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \overline{a_5a_6} + ... \text{ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre)},$$

să se arate că a şi s nu sunt pătrate perfecte.

Cătălin Amza

4. Pe o dreaptă d se consideră punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_{45}, astfel încât

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ... = A_{44}A_{45} = 1.$$

Să se arate că oricum am alege 10 puncte din mulţimea $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_{45}\}$, există printre acestea 4, notate M, N, P, Q, astfel încât segmentele $[MN]$ şi $[PQ]$ să aibă acelaşi mijloc.

Maria Pop

Clasa a VII-a

1. Se consideră pătratul $ABCD$ şi O punctul de intersecţie al diagonalelor sale. Construim pătratul $OEFG$, congruent cu $ABCD$, astfel încât $B \in (AE)$.

a) Să se arate că punctele B, C, G sunt coliniare.

b) Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului BEO.

Costel Anghel

2. Să se demonstreze că mulţimea $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se poate partiţiona în mod unic în două submulţimi nevide A, B cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x < y$, astfel încât $x \mid y$, sunt îndeplinite următoarele condiţii:

a) dacă $x \in A$ atunci $y \in B$;

b) dacă $y \in B$ atunci există $d \in A$ astfel încât $d \mid x$.

Marius Perianu

3. Aflaţi numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)}$ să fie pătrat perfect, unde $[x, y]$ şi (x, y) reprezintă cel mai mic multiplu comun respectiv cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Alexandru Ciolan

4. Să se determine toate valorile numărului natural nenul k pentru care există un dreptunghi care se poate împărţi, ducând paralele la laturile sale, atât în k pătrate congruente cât şi în $k + 88$ pătrate congruente.

Marius Perianu

Clasa a VIII-a

1. a) Să se arate că $(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = x^2 - 3y^2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\sqrt{3n^2 + 7n + 4} \in \mathbb{Q}$.

Florian Dumitrel

2. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon regulat cu $n \geq 4$ vârfuri. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulţimi $M \subset \{A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n\}$ astfel încât oricare patru puncte din M să nu fie vârfurile unui dreptunghi (sau pătrat).

Vasile Pop

3. Fie A şi B două mulţimi de numere naturale nenule cu proprietatea că pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numerele $\dfrac{b^{2n-1} + b^{2n}}{a^{2n-1}}$ şi $\dfrac{a^{2n} + a^{2n+1}}{b^{2n}}$ sunt naturale. Să se demonstreze că $A \subset B$.

Marius Perianu

4. Se consideră piramida $VABCD$, cu $ABCD$ patrulater convex. Se notează M, N, P, Q mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, VBC, VCD, respectiv VDA. Să se demonstreze că dreptele MG_3, NG_4, PG_1, QG_2 sunt concurente.

Costel Anghel

Clasa a IX-a

1. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, să se arate că:

a) $\dfrac{4a}{a^2+bc} \leq \dfrac{b+c}{bc}$;

b) $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{a^2}{a^2+bc}+\dfrac{b^2}{b^2+ca}+\dfrac{c^2}{c^2+ab}\right) \leq \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+1.$

Costel Anghel

2. Pentru fiecare submulţime nevidă $A = \{a_1 < a_2 < ... < a_k\}$ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ definim numărul

$$S_A = a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{k-1} a_k.$$

Să se calculeze suma tuturor acestor numere.

Maria Pop

3. Fie mulţimea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$, unde $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_n + n^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A \cap \mathbb{Q} = \{1\}$.

b) Să se calculeze $\sum\limits_{k=1}^{n} \left[a_k^2\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Florian Dumitrel

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$.

a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi D sunt paralele.

b) Fie punctele $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CD)$ şi $S \in (DA)$ astfel încât $[AP] \equiv [CQ]$ şi $[AS] \equiv [CR]$. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor $[AC]$, $[PQ]$ şi $[RS]$ sunt coliniare.

[* * *]

Clasa a X-a

1. a) Să se arate că mulţimea $A = [0, 1]$ are proprietatea:

$$(\mathbf{P}) : \forall\ a, b \in A \Rightarrow a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \in A.$$

b) Să se arate că dacă o mulţime $A \subset \mathbb{Q}$ are proprietatea $(\mathbf{P})$, atunci pentru orice element $a \in A \backslash \{0, 1\}$, $a = \dfrac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât m, n, p să fie laturile unui triunghi dreptunghic.

c) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, există o mulţime cu proprietatea $(\mathbf{P})$ având m elemente.

Marius Perianu

2. Să se decidă dacă există două numere naturale m, n şi două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$(f \circ g)(x) = x^{2m+1} \quad \text{şi} \quad (g \circ f)(x) = x^{2n+2}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \log_{12}\left(x^2 - x\right) = \log_4 y \\ \log_{12}\left(y^2 - y\right) = \log_4 z \\ \log_{12}\left(z^2 - z\right) = \log_4 x \end{cases}$.

Marius Perianu

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia:

$$xf(-x, y) + yf(x, -y) = (x-y)^2, \ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ astfel încât $\sigma(\sigma(\sigma(1))) = 2$.

Dinu Şerbănescu

2. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ o matrice cu elemente reale pozitive astfel încât $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, pentru orice $i = \overline{1,n}$.

a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^k este n.
b) Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ verifică relaţia $\det(A - \lambda I_n) = 0$, atunci $|\lambda| \leq 1$.

Vasile Pop

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 > 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{a_n + n}$ pentru $n \geq 1$.

a) Să se arate că $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n$.

Florian Dumitrel

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n^2} = \dfrac{1}{2}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Florian Dumitrel

Clasa a XII-a

1. Se consideră o mulţime nevidă A şi o mulţime F de funcţii de la A la A, astfel încât $(F, \circ)$ să fie grup (unde $\circ$ este compunerea funcţiilor).

a) Demonstraţi că există o mulţime $B \subset A$ care îndeplineşte condiţiile:
  1) pentru orice $f \in F$, $\operatorname{Im} f \subset B$ (unde $\operatorname{Im} f$ este imaginea funcţiei f);
  2) pentru orice $f \in F$, restricţia $f_B : B \to B$ a funcţiei f la mulţimea B este bijecţie;

b) Arătaţi că dacă $x, y \in A$ şi există $f_0 \in F$ astfel încât $f_0(x) = f_0(y)$, atunci $f(x) = f(y)$, $\forall\, f \in F$.

Mihai Bălună

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a, b \in G$. Se ştie că suma dintre numărul elementelor lui G care comută cu a şi numărul elementelor din G care comută cu b este un număr prim. Să se determine numărul elementelor care comută şi cu a şi cu b.

Marian Andronache

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{1 + x^2}$ şi F primitiva sa care se anulează în $x_0 = 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

Florian Dumitrel

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică. Dacă F este o primitivă a funcţiei f, să se arate că şirul

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{F(k)}{k^2}$$

este convergent dacă şi numai dacă F este periodică.

Florian Dumitrel

Baremele de corectare ale problemelor date la concurs
Clasa a IV-a

Problema 1.

a) $213 : 3 = 71$, deci sunt 71 de cifre egale cu 3 în adunarea dată. Între ele sunt 70 de semne + ... **2p**

b) $990 = 10 \cdot 99 = 10 \cdot 9 \cdot 11 = 9 \cdot 10 \cdot 11$, deci $a = 9$, $b = 10$, $c = 11$ **2p**

c) Din relaţiile date, obţinem: $\left.\begin{array}{r} c = b + 14 \Rightarrow c > b \\ a = c + 1 \Rightarrow a > c \\ b = d + 1 \Rightarrow b > d \end{array}\right\} \Rightarrow a > c > b > d$ **3p**

Problema 2.

a) 33 332 .... **2p**

b) $999\,996 : 3 = 333\,332$ **2p**

c) $\left(\underbrace{1\,00...0}_{100 \text{ cifre de } 0} - 4\right) : 3 = \underbrace{9\,99...96}_{99 \text{ cifre de } 9} : 3 = \underbrace{3\,33...32}_{99 \text{ cifre de } 3}$ **3p**

Problema 3.

2 ciocolate $\rightarrow$ 3 ore $\Rightarrow$ 1 ciocolată = 1 oră şi 30 de minute **2p**

28 caramele $\rightarrow$ 2 ore $\Rightarrow$ 14 caramele $\rightarrow$ 1 oră **2p**

14 caramele $\rightarrow$ 1 oră $\Rightarrow$ 7 caramele $\rightarrow$ 30 minute **2p**

1 ciocolată + 7 caramele $\rightarrow$ 2 ore **1p**

Problema 4.

Pentru a scrie numerele de la 1 la 9 se folosesc $9 \times 1 = 9$ cifre **0,5p**

Pentru a scrie numerele de la 10 la 99 se folosesc $90 \times 2 = 180$ cifre **0,5p**

Pentru a scrie numerele de la 100 la 999 se folosesc $900 \times 3 = 2700$ cifre **0,5p**

Pentru a scrie numerele de la 1000 la 9999 se folosesc $9000 \times 4 = 36\,000$ cifre **0,5p**

Deoarece pentru scrierea tuturor numerelor de cel mult trei cifre se folosesc $9 + 180 + 2700 = 2889$ cifre, iar pentru scrierea tuturor numerelor de cel mult 4 cifre se folosesc $9 + 180 + 2700 + 36\,000 = 38\,889$ cifre, înseamnă că cifra de pe poziţia 20 008 se află într-un număr de patru cifre **2p**

$20\,008 - 2889 = 17\,119$ cifre trebuie să mai scriem folosind numere de 4 cifre pentru a ajunge la cifra de pe poziţia 20 008 .... **1p**

$17\,119 : 4 = 4279$ rest 3, deci cifra de pe poziţia 20 008 este a treia cifră a celui de-al $4280-$ lea număr de patru cifre **1p**

Cum acesta este $1000 + 4280 - 1 = 5279$, cifra de pe poziţia 20 008 este 7 .... **1p**

Clasa a V-a

Problema 1.

Din relaţia din enunţ deducem că a, b, c sunt cifre nenule şi $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$ **2p**

$89a = 10c + b = \overline{cb}$ **2p**

Presupunând $a \geq 2 \Rightarrow \overline{cb} \geq 178$, fals **2p**

Aşadar $a = 1$ şi $\overline{cb} = 89$, deci $\overline{abc} = 198$ **1p**

Problema 2.

a) Dacă a este numărul resturilor egale cu 2 şi b este numărul resturilor egale cu 3, rezultă $2a + 3b = 27$ şi $a + b = 10$ **2p**

$a = 3$ şi $b = 7$, deci sunt 3 resturi egale cu 2 .... **1p**

b) Fie $x_1, x_2, ..., x_{10}$ cele 10 numere şi $c_1, c_2, ..., c_{10}$ câturile obţinute prin împărţirea lor la n. Evident $n \geq 4$. Conform punctului a), avem:

$x_1 = n \cdot c_1 + 2, \quad x_2 = n \cdot c_2 + 2, \quad x_3 = n \cdot c_3 + 2$ **1p**

$x_4 = n \cdot c_4 + 3, \quad x_5 = n \cdot c_5 + 3, \quad ..., \quad x_{10} = n \cdot c_{10} + 3$ **1p**

Întrucât $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 2008$, folosind relaţiile de mai sus rezultă $n \cdot (c_1 + c_2 + ... + c_{10}) + 27 = 2008$, de unde $n \cdot (c_1 + c_2 + ... + c_{10}) = 1981$ **1p**

Deci n este un divizor mai mare al lui 1981, mai mare sau egal cu 4. Cel mai mic număr cu această proprietate este $n = 7$ **1p**

Problema 3.

Dacă $a < b < c < d < e$, atunci $\left.\begin{array}{c}(a+b+c+d+e) : 5 = 2008 \Rightarrow a+b+c+d+e = 10040 \\ (b+c+d+e) : 4 = 2010 \Rightarrow b+c+d+e = 8040 \\ (a+b+c+d) : 4 = 2006 \Rightarrow a+b+c+d = 8024\end{array}\right\}$ **2p**

Rezultă $a = 2000$, $e = 2016$ **2p**

În plus, $b + c + d = 6024$, cu $2000 < b < c < d < 2016$. Cum $b < c < d$, rezultă $3b < 6024$, deci $b < 2008$.

- $b = 2001 \Rightarrow c + d = 4023$ şi $2001 < c < d < 2016$, cu 4 soluţii: $(2008, 2015), (2009, 2014), ..., (2011, 2012)$.
- $b = 2002 \Rightarrow c + d = 4022$ şi $2002 < c < d < 2016$, cu 4 soluţii: $(2007, 2015), (2008, 2014), ..., (2010, 2012)$.
- $b = 2003 \Rightarrow c + d = 4021$ şi $2003 < c < d < 2016$, cu 5 soluţii: $(2006, 2015), (2007, 2014), ..., (2010, 2011)$.
- $b = 2004 \Rightarrow c + d = 4020$ şi $2004 < c < d < 2016$, cu 5 soluţii: $(2005, 2015), (2006, 2014), ..., (2009, 2011)$.
- $b = 2005 \Rightarrow c + d = 4019$ şi $2005 < c < d < 2016$, cu 4 soluţii: $(2006, 2013), (2007, 2018), ..., (2009, 2010)$.
- $b = 2006 \Rightarrow c + d = 4018$ şi $2006 < c < d < 2016$, cu 2 soluţii: $(2007, 2011), (2008, 2010)$.
- $b = 2007 \Rightarrow c + d = 4017$ şi $2007 < c < d < 2016$, cu 1 soluţie: $(2008, 2009)$.

În concluzie sunt 25 astfel de mulţimi **3p**

Problema 4.

Dacă (m, n) este o pereche *interesantă* cu suma 2793, atunci m şi n sunt numere de cel mult 4 cifre, $m = \overline{a_1b_1c_1d_1}$ şi $n = \overline{a_2b_2c_2d_2}$ (cifrele $a_1, b_1c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ pot fi şi 0) astfel încât $a_1 + a_2 = 2$, $b_1 + b_2 = 7$, $c_1 + c_2 = 9$ şi $d_1 + d_2 = 3$ **3p**

Dacă $a_1 + a_2 = 2$, atunci (a_1, a_2) pot fi $(0, 2)$, $(1, 1)$ sau $(2, 0)$, deci aceasta poate fi aleasă în 3 moduri **1p**

Analog, o pereche (b_1, b_2) cu $b_1 + b_2 = 7$ poate fi aleasă în 8 moduri, o pereche (c_1, c_2) în 10 moduri, iar o pereche (d_1, d_2) în 4 moduri **2p**

În concluzie, sunt $3 \times 8 \times 10 \times 4 = 960$ perechi interesante cu suma 2793 .... **1p**

Clasa a VI-a

Problema 1.

a) Fie n cel mai mic dintre cele 75 de numere; atunci acestea sunt n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+74$ **1p**

Suma lor este $S = 75n + (1 + 2 + ... + 74) = 75n + 2775$ **1p**

Notăm zu(S) numărul format de ultimele două cifre ale lui S.

- Dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75 \cdot 4k + 2775 = 300k + 2775 = 100(3k + 27) + 75 \Rightarrow \text{zu}(S) = 75$.
- Dacă $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75(4k+1)+2775 = 300k+2850 = 100(3k+28)+50 \Rightarrow \text{zu}(S) = 50$.
- Dacă $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75(4k+2)+2775 = 300k+2925 = 100(3k+29)+25 \Rightarrow \text{zu}(S) = 25$.
- Dacă $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $S = 75(4k+3)+2775 = 300k+3000 = 100(3k+30) \Rightarrow \text{zu}(S) = 00$.

În concluzie, ultimele cifre ale lui S pot fi 00, 25, 50 sau 75 .... **2p**

b) Fie $a \leq b \leq c \leq d$ cele patru numere **1p**

Din $d \mid \dfrac{a+b+c}{3}$, rezultă $3d \mid a+b+c$ **1p**

Atunci $3d \leq a+b+c \Rightarrow 3d \leq a+2d \Rightarrow d \leq a$ **1p**

Aşadar $a = b = c = d$.

Problema 2.

Dacă n este un număr ca în enunţ, atunci există numerele naturale $c_1, c_2, ..., c_{10}$ şi $r_1, r_2, ..., r_{10}$ astfel încât

$$\left.\begin{array}{r} n = 10c_1 + r_1 \text{ şi } \ r_1 < 10 \Rightarrow r_1 \leq 9 \\ n = 11c_2 + r_2 \text{ şi } \ r_2 < 11 \Rightarrow r_2 \leq 10 \\ n = 12c_3 + r_3 \text{ şi } \ r_3 < 12 \Rightarrow r_3 \leq 11 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n = 19c_{10} + r_{10} \text{ şi } \ r_{10} < 19 \Rightarrow r_{10} \leq 18 \end{array}\right\} \text{ .... } \mathbf{2p}$$

Avem $r_1 + r_2 + ... + r_{10} \leq 9 + 10 + 11 + ... + 18 = 135$. Dar, din enunţ, $r_1 + r_2 + ... + r_{10} = 135$, deci $r_1 = 9$, $r_2 = 10$, $r_3 = 11$, ..., $r_{10} = 18$ **2p**

Rezultă că n este nenul şi:

$$\left.\begin{array}{ccccc} n = 10c_1 + 9 & \Rightarrow & n+1 = 10c_1 + 10 = 10(c_1+1) & \Rightarrow & 10 \mid n+1 \\ n = 11c_2 + 10 & \Rightarrow & n+1 = 11c_2 + 11 = 11(c_2+1) & \Rightarrow & 11 \mid n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n = 19c_{10} + 18 & \Rightarrow & n+1 = 19c_{10} + 19 = 19(c_{10}+1) & \Rightarrow & 19 \mid n+1 \end{array}\right\} \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Cel mai mic număr n cu proprietăţile de mai sus este

$n = \text{c.m.m.m.c.}(10, 11, 12, ..., 19) - 1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 - 1 = 77\,597\,519$ **2p**

Problema 3.

Deoarece pentru $n \geq 5$ numărul $n!$ se termină în 0, rezultă că ultima cifră a lui a este ultima cifră a numărului $4! + 3! + 2! = 32$, adică 2, deci a nu este pătrat perfect **2p**

Restul împărţirii lui s la 3 este acelaşi cu restul împărţirii sumei $a_1 + a_2 + ... + a_p$ la 3, deoarece $s = 9(a_1 + a_3 + a_5 + ...) + (a_1 + a_2 + ... + a_p)$ **2p**

Restul împărţirii lui s la 3 este egal cu restul împărţirii lui a la 3, adică 2 (deoarece numerele $n!$, cu $n \geq 3$ sunt multipli de 3) **1p**

Ca urmare, s este de forma $3k + 2$, deci nu este pătrat perfect, întrucât orice pătrat perfect dă restul 0 sau 1 la împărţirea cu 3 .... **2p**

Problema 4.

Numărul segmentelor cu extremităţile în 2 din cele 10 puncte alese este $9 + 8 + 7 + ... + 1 = 45$ **1p**

Lungimea oricărui astfel de segment este un număr natural cuprins între 1 şi 44 .... **1p**

Rezultă că există două astfel de segmente cu aceeaşi lungime, fie acestea $[AB]$ şi $[CD]$ **1p**

- Dacă $[AB]$ şi $[CD]$ nu au puncte comune, presupunem că punctele A, B, C, D se află pe dreaptă în ordinea $A - B - C - D$. Notând cu M mijlocul lui $[BC]$ rezultă

$$AM = AB + BM = CD + CM = DM,$$

  adică segmentele $[BC]$ şi $[AD]$ au acelaşi mijloc **2p**

- Dacă $[AB]$ şi $[CD]$ au puncte comune, presupunând că punctele A, B, C, D se află pe dreaptă în ordinea $A - C - B - D$. Atunci $AC = AB - BC$ şi $BD = CD - BD$, deci $[AC] \equiv [BD]$. Ca mai sus, notând cu M mijlocul lui $[BC]$ obţinem

$$AM = AC + CM = BD + BM = DM,$$

  adică segmentele $[BC]$ şi $[AD]$ au acelaşi mijloc **2p**

Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Unghiurile $\widehat{COG}$ şi $\widehat{BOE}$ au acelaşi complement – unghiul $\widehat{EOC}$, deci sunt congruente. Cum $[OB] \equiv [OC]$ şi $[OE] \equiv [OG]$, rezultă că $\Delta BOE \equiv \Delta COG$ (LUL), de unde $\widehat{OBE} \equiv \widehat{OCG}$ **1p**

Dar $m\left(\widehat{OBE}\right) = 180° - 45° = 135°$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{OCG}\right) = 135°$ **1p**

Deci $m\left(\widehat{BCG}\right) = 180°$, adică B, C, G sunt coliniare **1p**

b) Construim $OM \perp AD$, $M \in AD$ şi $BN \parallel OE$, $N \in OM$ **2p**

Patrulaterul $BEON$ este paralelogram, de unde rezultă că $[BN] \equiv [OE] \equiv [BC]$ şi triunghiul NBC este echilateral (N aparţine mediatoarei lui $[BC]$, deci $NB = NC = BC$) **1p**

Rezultă că $m\left(\widehat{BOE}\right) = m\left(\widehat{OBN}\right) = 60° - 45° = 15°$.Cum $m\left(\widehat{OBE}\right) = 135°$ rezultă $m\left(\widehat{BEO}\right) = 30°$. **1p**

Problema 2.

Vom arăta că A este mulţimea numerelor prime.

Presupunem că B conţine un număr prim p. Cum A este nevidă, A conţine cel puţin un element a; atunci $a \mid ap$, deci $ap \in B$. Dar $p \mid ap \in B$, deci există $d \in A$ astfel încât $d \mid p$ si cum $1 \notin A$, rezultă $d = p$, adică $p \in A$, contradicţie. Ca urmare, B nu conţine nici un număr prim, deci acestea sunt toate în A **4p**

Din prima condiţie rezultă că A nu conţine numere compuse, deoarece, presupunând că A conţine un număr compus a, ar exista $p, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, prime, astfel încât $pq \mid a$. Cum $p \mid a \Rightarrow a \in B$ **3p**

Problema 3.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)} = k^2$.

Vom rezolva mai întâi ecuaţia $2^m + 3^n = k^2$, unde $m, n, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $m = 1$ atunci $2^m + 3^n \equiv 2 \pmod 3 \neq k^2$. Deci $m \geq 2$. Atunci $2^m \equiv 0 \pmod 4$. Ştim că $3^n \equiv 1 \pmod 4$ pentru n par şi $3^n \equiv 3 \pmod 4$ pentru n impar. Cum $k^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ rezultă că n trebuie să fie par **2p**

Fie $n = 2t$, $t \in \mathbb{N}^*$. Atunci $2^m = (k - 3^t)(k + 3^t)$. Fie $k - 3^t = 2^\alpha$ şi $k + 3^t = 2^\beta$, cu $\alpha + \beta = m$, $\alpha < \beta$.

Rezultă în continuare $2^\beta - 2^\alpha = 2 \cdot 3^t$ $(*)$

Dacă $\alpha = 0$ rezultă că 2^β trebuie să fie impar $\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3^t = 0$, imposibil. Deci $\alpha \geq 1$ **1p**

Din $(*)$ avem $2^{\alpha-1}(2^{\beta-\alpha} - 1) = 3^t$. Dacă $\alpha \geq 2$ rezultă $3^t \vdots 2$, absurd. Atunci $\alpha = 1$. Avem în continuare $2 + 2 \cdot 3^t = 2^\beta \Rightarrow 1 + 3^t = 2^{\beta-1}$, $t > 0$. Ştim că $2^{\beta-1} \equiv 1 \pmod 3$ pentru $\beta - 1$ par şi $2^{\beta-1} \equiv 2 \pmod 3$ pentru $\beta - 1$ impar. Trebuie deci ca $\beta - 1 = 2b$, $b \in \mathbb{N}$. Avem astfel $3^t = \left(2^b - 1\right)\left(2^b + 1\right)$. Fie $2^b - 1 = 3^u$ şi $2^b + 1 = 3^v$, cu $u + v = t$ şi $u < v$. Obţinem $3^v - 3^u = 2 \Leftrightarrow 3^u\left(3^{v-u} - 1\right) = 2$. De aici $u = 0$ şi $v = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow t = 1$. Prin urmare $m = 4$ şi $n = 2$ **3p**

Astfel, dacă $2^{[x,y]} + 3^{(x,y)}$ este pătrat perfect trebuie ca $[x, y] = 4$ şi $(x, y) = 2$. Fie $D = (x, y)$ şi $x = DX$, $y = DY$, $X, Y \in \mathbb{N}^*$, $(X, Y) = 1$.

Din $[x, y] \cdot (x, y) = xy \Rightarrow [x, y] = D \cdot X \cdot Y$. Dar $D = 2$ şi $D \cdot X \cdot Y = 4$, de unde $X = 1$, $Y = 2$ şi $X = 2$, $Y = 1$. Atunci $(x, y) \in \{(2, 4), (4, 2)\}$ **1p**

Problema 4.

Presupunem că laturile a şi b ale dreptunghiului se împart în m_1, respectiv n_1 segmente de lungime u, formându-se, prin paralele la laturi, k pătrate de latură u, şi în m_2, respectiv n_2 segmente de lungime v, formându-se $k + 88$ pătrate de latură v $(m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*)$.

Atunci $\begin{cases} a = m_1 u = m_2 v \\ b = n_1 u = n_2 v \end{cases} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{v}{u}$ **2p**

În plus, $k = m_1 n_1$ şi $k + 88 = m_2 n_2$, deci $m_2 n_2 - m_1 n_1 = 88$ **1p**

Fie $(m_1, m_2) = d_1$, $(n_1, n_2) = d_2$; atunci există $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, astfel încât $m_1 = pd_1$, $n_1 = pd_2$, $m_2 = qd_1$, $n_2 = qd_2$ ($\dfrac{p}{q}$ este fracţia ireductibilă obţinută din $\dfrac{m_1}{m_2}$ şi respectiv $\dfrac{n_1}{n_2}$ simplificând prin d_1 şi respectiv d_2).

Rezultă $d_1 d_2 q^2 - d_1 d_2 p^2 = 88 \Leftrightarrow d_1 d_2 (q - p)(q + p) = 88$ **1p**

Cum numerele $q - p$ şi $q + p$ au aceeaşi paritate, şi $(p, q) = 1$, rezultă că singurele cazuri posibile sunt:

$$\begin{cases} q-p=1 \\ q+p=11 \\ d_1d_2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=5 \\ q=6 \\ d_1d_2=8 \end{cases} \Rightarrow k=m_1n_1=p^2d_1d_2=200.$$

$$\begin{cases} q-p=2 \\ q+p=4 \\ d_1d_2=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=3 \\ d_1d_2=11 \end{cases} \Rightarrow k=m_1n_1=p^2d_1d_2=11.$$

$$\begin{cases} q-p=2 \\ q+p=22 \\ d_1d_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=10 \\ q=12 \\ d_1d_2=2 \end{cases} \text{, nu convine, deoarece } (p,q)=2.$$

$$\begin{cases} q-p=4 \\ q+p=22 \\ d_1d_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=9 \\ q=13 \\ d_1=d_2=1 \end{cases} \Rightarrow k=m_1n_1=p^2d_1d_2=81.$$

Soluţiile sunt $k \in \{11, 81, 200\}$ **3p**

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Verificare directă **1p**

b) Întrucât $3n^2+7n+4=(3n+4)(n+1)$ şi $(3n+4,n+1)=1$, rezultă că $\sqrt{3n^2+7n+4}\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $n+1$ şi $3n+4$ sunt pătrate perfecte **(1)** **1p**

Deci există $u,v\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $3n+4=u^2$ şi $n+1=v^2$, de unde obţinem $u^2-3v^2=1$ **(2)** **1p**

Observăm că numerele naturale $u=2$ şi $v=1$ verifică relaţia **(2)**.

Conform punctului a), dacă $u^2-3v^2=1$, notând $U=2u+3v$ şi $V=u+2v$, rezultă

$$U^2-3V^2=u^2-3v^2=1,$$

deci (U,V) este o altă pereche ce verifică relaţia **(2)**, cu $U>u$ şi $V>v$ **2p**

Notând $N=V^2-1=\dfrac{U^2-4}{3}\in\mathbb{N}$, rezultă $N>n$ şi numerele $N+1$ şi $3N+4$ sunt pătrate perfecte . **1p**

Astfel putem genera o infinitate de perechi de numere naturale de forma (u,v) cu $u^2-3v^2=1$, şi corespunzător, o infinitate de numere naturale n care au proprietatea **(1)** **1p**

Problema 2.

Dacă $ABCD$ este un dreptunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$, atunci (A,C) şi (B,D) sunt perechi de puncte diametral opuse **2p**

Dacă n este impar, printre vârfurile poligonului $A_1A_2...A_n$ nu există puncte diametral opuse, deci nici unul dintre patrulaterele cu vârfurile în A_1, $A_2,...,$ A_n nu este dreptunghi, de unde $\max|M|=n$ **2p**

Dacă n este par, $n=2k$, partiţionăm vârfurile în k perechi de puncte diametral opuse: $\{A_1,A_{k+1}\}$, $\{A_2,A_{k+2}\}$, ..., $\{A_k,A_{2k}\}$. Impunem condiţia ca mulţimea M să conţină cel mult o pereche de puncte diametral opuse; atunci $\max|M|=k+1$ **2p**

O mulţime care realizează maximul este $\{A_1,A_2,...,A_{k+1}\}$ **1p**

Problema 3.

Fie $a\in A$. Vom demonstra că dacă $\dfrac{b^{2n-1}+b^{2n}}{a^{2n-1}}\in\mathbb{N}$ şi $\dfrac{a^{2n}+a^{2n+1}}{b^{2n}}\in\mathbb{N}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $a=b$.

Afirmaţia este evident adevărată dacă $a=1$, deoarece rezultă că $b^{2n}\mid 2$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci $b=1$ **1p**

Dacă $a\geq 2$, fie p un divizor prim al lui a. Pentru orice $n\geq 1$ rezultă că $p^{2n-1}\mid a^{2n-1}$ şi, întrucât $a^{2n-1}\mid b^{2n-1}(b+1)$, obţinem $p^{2n-1}\mid b^{2n-1}(b+1)$. În particular, rezultă $p\mid b$ sau $p\mid b+1$. Deoarece b şi $b+1$ sunt prime între ele, presupunând că $p\mid b+1$, rezultă $p\nmid b$ şi atunci $p^{2n-1}\mid b+1$ pentru orice $n\geq 1$, fals. În consecinţă, $p\mid b$ **2p**

Analog, dacă q este un divizor prim al lui b, rezultă $q^{2n}\mid b^{2n}$ şi din relaţia $b^{2n}\mid a^{2n}(a+1)$, obţinem $q^{2n}\mid a^{2n}(a+1)$, pentru orice $n\geq 1$, de unde, ţinând cont că $(a,a+1)=1$, rezultă $q\mid a$ sau $q\mid a+1$. Presupunerea $q\nmid a$ conduce la $q^{2n}\mid a+1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, fals. Ca urmare, $q\mid a$ **2p**

În concluzie, a şi b au aceeaşi divizori primi. Vom arăta că exponenţii la care apare un număr prim p în descompunerea în factori ai lui a şi respectiv b sunt egali. Fie α şi β aceşti exponenţi; atunci $p^\alpha\mid a$ şi $p^\beta\mid b$. Ştim că $p\nmid a+1$ şi $p\nmid b+1$. Avem:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{b(b+1)}{a}\in\mathbb{N}\Rightarrow a\mid b(b+1)\Rightarrow\alpha\leq\beta\\ \frac{a^2(a+1)}{b^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow b^2\mid a^2(a+1)\Rightarrow 2\beta\leq 2\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\beta$$ **1p**

În concluzie, $a=b$, deci $A\subset B$ **1p**

Problema 4.

Notăm cu E şi F mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$ şi cu R mijlocul segmentului $[EF]$. Patrulaterul $ENFQ$ este paralelogram **1p**

Atunci punctele $Q,\ R,\ N$ sunt coliniare. Notând $\{G\}=VR\cap NG_4$, din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul VQR cu transversala $N-G-G_4$ rezultă $\dfrac{NR}{NQ}\cdot\dfrac{G_4Q}{G_4V}\cdot\dfrac{GV}{GR}=1\Rightarrow\dfrac{GV}{GR}=4$ **2p**

Analog, $EMFP$ este paralelogram, de unde rezultă că $M,\ R,\ P$ sunt coliniare şi cum $\dfrac{MR}{MP}\cdot\dfrac{G_3P}{G_3V}\cdot\dfrac{GV}{GR}=1$,din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul VRP rezultă că punctele $M,\ G,\ G_3$ sunt coliniare . **2p**

Analog se demonstrează că (O,G,G_2) şi (P,G,G_1) sunt triplete de puncte coliniare, deci dreptele MG_3, NG_4, PG_1, QG_2 sunt concurente în G **2p**

Clasa a IX-a

Problema 1.

a) Avem $a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc}$ **1p**

$b+c \geq 2\sqrt{bc}$ **1p**

Prin înmulţire se obţine $\left(a^2+bc\right)(b+c) \geq 4abc$, echivalentă cu inegalitatea din enunţ **1p**

b) De la punctul a) rezultă $\dfrac{a^2}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}\right)$ şi inegalităţile analoage. Sumând, avem:

$\sum \dfrac{a^2}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\right) \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}\sum \dfrac{a^2}{a^2+bc} \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}\right)$. **2p**

Notând $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{b}{c}$, $z=\dfrac{c}{a}$, este suficient să arătăm că

$$x^2+y^2+z^2+1 \geq \frac{2}{3}(x+y+z+xy+yz+zx), \text{ cu } xyz=1.$$

Inegalitatea anterioară se scrie

$$3\left(x^2+y^2+z^2+1\right) \geq 2(xy+yz+zx)+2(x+y+z),$$

sau, echivalent, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ **2p**

Problema 2.

Facem convenţia $S_\emptyset = 0$. Mulţimea $\{1,2,...,n\}$ are 2^n submulţimi pe care le grupăm în două clase:

- cele care nu conţin pe 1, în număr de 2^{n-1};
- cele care conţin pe 1, în număr de 2^{n-1} **2p**

O submulţime B din a doua clasă este de forma $B=\{1\}\cup A$, unde A este din prima clasă **2p**

Pentru o astfel pereche (A,B) cu $A=\{a_1<a_2<...<a_k\}$ avem $B=\{1<a_1<a_2<...<a_k\}$, de unde

$$\begin{aligned} S_A &= a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{k-1}a_k, \\ S_B &= 1-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^k a_k, \end{aligned}$$

deci $S_A+S_B=1$ **2p**

Ca urmare, $\displaystyle\sum_{A\subset\{1,2,...,n\}} S_A = 2^{n-1}$ **1p**

Problema 3.

a) Vom demonstra prin inducţie că $a_n \notin \mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 2$. Numărul $a_2=\sqrt{2}$ este iraţional. Presupunem că $a_k \notin \mathbb{Q}$ $(k \geq 2)$. Dacă $a_{k+1} \in \mathbb{Q}$, atunci din relaţia $a_k = a_{k+1}^2 - k^2$, ar rezulta $a_k \in \mathbb{Q}$, în contradicţie cu presupunereea făcută. Prin urmare, $a_n \notin \mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 2$ **2p**

b) Numerele a_n sunt pozitive pentru orice $n \geq 1$ şi $a_n = \sqrt{a_{n-1}+(n-1)^2} > \sqrt{(n-1)^2} = n-1$ **1p**

Prin inducţie matematică, se demonstrează că $a_n < n$, pentru orice $n \geq 2$. Într-adevăr, $a_2=\sqrt{2}<2$ şi, presupunând $a_k<k$ pentru un $k\geq 2$, rezultă că

$$a_{k+1}=\sqrt{a_k+k^2}<\sqrt{k+k^2}<k+1.$$

În concluzie, $n-1<a_n<n$ şi $[a_n]=n-1$ pentru orice $n\geq 2$ **1p**

Atunci, pentru orice $n \geq 3$, avem:

$a_n^2 = a_{n-1}+(n-1)^2 \Rightarrow \left[a_n^2\right] = \left[a_{n-1}+(n-1)^2\right] = [a_{n-1}]+(n-1)^2 = n-2+(n-1)^2 = n^2-n-1$ **2p**

Rezultă $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\right] = 3+\sum_{k=3}^{n}\left[a_k^2\right] = 3+\sum_{k=3}^{n}\left(k^2-k-1\right) = \frac{n^3-4n+9}{3}$ **1p**

Problema 4.

a) Fie BB' şi DD', $B' \in (CD)$, $D' \in (AB)$ bisectoarele unghiurilor B şi D ale patrulaterului. Atunci $m\left(\widehat{B}\right)+m\left(\widehat{D}\right) = 360° - 2m\left(\widehat{A}\right)$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{B'BA}\right)+m\left(\widehat{D'DC}\right) = 180° - m(A) = m\left(\widehat{ADD'}\right)+m\left(\widehat{AD'D}\right)$ **1p**

Cum $\widehat{ADD'} \equiv \widehat{CDD'}$, obţinem $\widehat{B'BA} \equiv \widehat{DD'A}$, adică $BB' \parallel DD'$ **1p**

b) Fie M, O, N respectiv mijloacele segmentelor $[PQ,]$ $[AC]$ şi $[RS]$. Din relaţiile $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CO}$, deducem că $\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QC}\right)$ **1p**

Cum $[AP] \equiv [QC]$, considerând punctele $P' \in (AB)$ şi $Q' \in (BC)$ astfel încât $[BP'] \equiv [AP]$ şi $[BQ'] \equiv [CQ]$, rezultă că $\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BP'} + \overrightarrow{BQ'}\right)$ **2p**

Deci MO este paralelă cu dreapta BO', unde O' este mijlocul segmentului $[P'Q']$. Cum $\Delta BP'Q'$ este isoscel, rezultă că BO' este de fapt bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ **1p**

Analog, rezultă că ON este paralelă cu bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ şi, folosind punctul a), rezultă că punctele M, O şi N sunt coliniare **1p**

Clasa a X-a

Problema 1.

a) Pentru orice $a, b \in [0,1]$ avem, conform inegalităţii C.B.S.:

$$\left(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right)^2 \leq \left(a^2+\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{1-b^2}\right)^2+b^2\right)=1,$$

deci $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2} \in [-1,1]$. Evident, $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2} \geq 0$, deci $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2} \in [0,1]$. **1p**

b) Dacă A are proprietatea $(\mathbf{P})$, atunci $A \subset [0,1]$. Presupunând $A \subset \mathbb{Q}$ şi $a \in A$; atunci, pentru $b := a$, rezultă că $2a\sqrt{1-a^2} \in A \subset \mathbb{Q}$. Cum $a \neq 0$, atunci $\sqrt{1-a^2} \in \mathbb{Q}$, adică există $b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ (deoarece $a \neq 1$) astfel încât $a^2+b^2=1$. Fie $b=\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$; din $a^2+b^2=1$, rezultă că

$$\frac{m^2}{n^2}+\frac{p^2}{q^2}=1 \Leftrightarrow m^2q^2+p^2n^2=n^2q^2.$$

Atunci $n^2 \mid \left(m^2q^2+p^2n^2\right) \Rightarrow n^2 \mid m^2q^2$ şi cum $(n,m)=1 \Rightarrow n^2 \mid q^2 \Rightarrow n \mid q$. Analog, $q \mid n$, deci $q=n$. Ca urmare, $m^2+p^2=n^2$, deci p, m, n sunt laturile unui triunghi dreptunghic **3p**

c) Întrucât $A \subset [0,1]$, pentru orice $a \in A$, există $x_a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $a=\sin x_a$. Dacă $a=\sin x_a$ şi $b=\sin x_b$, atunci

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=\sin x_a\cos x_b+\sin x_b\cos x_a=\sin\left(x_a+x_b\right).$$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$; atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m=n+1$.Considerăm mulţimea $A=\{a_0, a_1, ..., a_n\}$, unde $a_k=\sin\dfrac{k\pi}{2n}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,n\}$. Atunci A are $n+1$ elemente şi pentru orice $k, j \in \overline{0,n}$ avem:

$$a_k\sqrt{1-a_j^2}+a_j\sqrt{1-a_k^2}=\sin\frac{(k+j)\pi}{2n}=\begin{cases} a_{k+j} & \text{dacă } 0 \leq k+j \leq n \\ a_{2n-(k+j)} & \text{dacă } n < k+j \leq 2n \end{cases},$$

deci A are proprietatea $(\mathbf{P})$ **3p**

Problema 2.

Arătăm că răspunsul este negativ.

Într-adevăr, presupunând că răspunsul ar fi afirmativ, atunci, din relaţia $(f \circ g)(x)=x^{2m+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ar rezulta că g este injectivă **1p**

Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem: $g\left((f \circ g)(x)\right)=(g \circ f)(g(x)) \Rightarrow g\left(x^{2m+1}\right)=(g(x))^{2n+2}$ **2p**

Pentru $x \in \{-1,0,1\}$ obţinem

$$g(0)=(g(0))^{2n+2}, \quad g(1)=(g(1))^{2n+2}, \quad g(-1)=(g(-1))^{2n+2},$$

deci $g(0),\ g(1),\ g(-1) \in \{0,1\}$ **2p**

Numerele $g(0),\ g(1),\ g(-1)$ nu pot fi toate distincte, contradicţie cu injectivitatea funcţiei g **2p**

Problema 3.

Din condiţiile de existenţă ale logaritmilor, deducem că $x, y, z > 1$. Sistemul se poate scrie sub forma:

$$\begin{cases} y=4^{\log_{12}\left(x^2-x\right)} \\ z=4^{\log_{12}\left(y^2-y\right)} \\ x=4^{\log_{12}\left(z^2-z\right)} \end{cases}$$
.... **1p**

Considerând funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4^{\log_{12}\left(x^2-x\right)}$, rezultă $y=f(x)$, $z=f(y)$ şi $x=f(z)$. Deoarece funcţia $x \mapsto x^2-x$ este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, rezultă că f este strict crescătoare, fiind compunere de funcţii strict crescătoare **2p**

Din motive de simetrie, putem presupune $x \leq y \leq z$, fără a pierde generalitatea. Obţinem $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, adică $y \leq z \leq x$, de unde $x=y=z$ **1p**

Rămâne să rezolvăm ecuaţia $\log_{12}\left(x^2-x\right)=\log_4 x$. Notând $t=\log_4 x$, obţinem $x=4^t$ şi $x^2-x=12^t$, de unde rezultă ecuaţia $16^t-4^t=12^t$ **2p**

Ecuaţia are soluţia unică $t = 1$, prin urmare sistemul are soluţia $x = y = z = 4$ **1p**

Problema 4.

Din enunţ ştim că

$$xf(-x,y) + yf(x,-y) = (x-y)^2, \ \forall \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

Atunci

$$x \mapsto -x \overset{(1)}{\Rightarrow} -xf(x,y) + yf(-x,-y) = (x+y)^2 \qquad \textbf{(2)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \textbf{1p}$$

şi

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto -x \\ y \mapsto -y \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} xf(-x,-y) - yf(x,y) = (x+y)^2. \qquad \textbf{(3)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \textbf{1p}$$

Prin scădere, obţinem $(x-y)(f(x,y) + f(-x,-y)) = 0 \Rightarrow f(-x,-y) = -f(x,y), \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \ x \neq y$. **1p**

Din (2) rezultă şi $(-x-y) f(x,y) = (x+y)^2 \Rightarrow f(x,y) = -(x+y), \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \ x \neq \pm y$ **1p**

Pentru $y = x$, din relaţia (1) obţinem:

$$x(f(-x,x) + f(x,-x)) = 0 \Rightarrow f(-x,x) = -f(x,-x), \ \ \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x,-x) = \begin{cases} h(x), \ \text{dacă } x \geq 0 \\ -h(-x), \ \text{dacă } x < 0 \end{cases},$$

unde $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie arbitrară **1p**

La fel , pentru $y = -x$, din relaţia (1) obţinem:

$$x(f(-x,-x) - f(x,x)) = 4x^2 \Rightarrow f(-x,-x) = 4x + f(x,x), \ \ \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x,x) = \begin{cases} g(x), \ \text{dacă } x > 0 \\ -4x + g(-x), \ \text{dacă } x < 0 \end{cases},$$

unde $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie arbitrară **1p**

În concluzie, $f(x,y) = \begin{cases} -x-y & \text{dacă } x \neq \pm y \\ g(x) & \text{dacă } x = y > 0 \\ -4x + g(-x) & \text{dacă } x = y < 0 \\ h(x) & \text{dacă } x = -y \geq 0 \\ -h(-x) & \text{dacă } x = -y < 0 \end{cases}$ **1p**

Clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $\sigma(1) = i$, $\sigma(i) = j$; atunci $\sigma(j) = 2$.

- dacă $i = 1 \Rightarrow \sigma(\sigma(\sigma(1))) = 1$, contradicţie **1p**
- dacă $i = 2$, atunci $\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = j \\ \sigma(j) = 2 \end{cases} \Rightarrow j = 1 \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \\ 2 & 1 & \sigma(3) & ... & \sigma(k) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ şi există $(n-2)!$ astfel de permutări **2p**
- dacă $i \in \{3, 4, ..., n\}$ atunci:
  - dacă $j = 1$ rezultă $\begin{cases} \sigma(1) = i \\ \sigma(i) = 1 \\ \sigma(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 2$, contradicţie.
  - dacă $j = 2$ rezultă $\begin{cases} \sigma(1) = i \\ \sigma(i) = 2 \\ \sigma(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 2$, contradicţie.
  - dacă $j = i$ rezultă $\begin{cases} \sigma(1) = i \\ \sigma(i) = i \\ \sigma(i) = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 2$ şi $\sigma(1) = \sigma(2) = 2$, contradicţie **1p**

Aşadar $j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{1, 2, i\}$, deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & i & ... & j & ... & n \\ i & ... & j & ... & 2 & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Deoarece i poate lua $n-2$ valori, j poate lua $n-3$ valori şi numerele $\sigma(k)$, $k \neq 1, i, j$ pot fi alese în $(n-3)!$ moduri, numărul permutărilor de acest tip este $(n-2) \times (n-3) \times (n-3)! = (n-3) \cdot (n-2)!$ **2p**

În concluzie, există $(n-2)! + (n-2) \cdot (n-2)! = (n-2) \cdot (n-2)!$ permutări ca în enunţ **1p**

Problema 2.

a) Pentru orice $i = \overline{1, n}$ avem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \Rightarrow AU = U$, unde $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ **1p**

Prin inducţie rezultă $A^k U = U$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi notând $A^k = B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ obţinem $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$, $\forall$ $i = \overline{1, n}$, şi atunci $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ **2p**

b) Dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$, atunci există o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = \lambda X$, relaţie echivalentă cu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$, $\forall i = \overline{1, n}$ **2p**

Fie $p \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Pentru orice $i = \overline{1, n}$ avem:

$$|\lambda| \cdot |x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot |x_j| \leq |x_p| \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = |x_p|,$$

de unde, pentru $i = p$, rezultă $|\lambda| \cdot |x_p| \leq |x_p|$. Cum $x_p \neq 0$, rezultă $|\lambda| \leq 1$ **2p**

Problema 3.

a) Observăm că $a_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$ şi $a_1 > a_2 = 1$. Pentru orice $n \geq 1$ avem:

$a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n+1}{a_n+n} = \dfrac{a_n^2+(n-1)\,a_n-1}{a_n+n}$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n+1}{a_n+n} \geq \dfrac{1}{n} \Rightarrow a_n \geq \dfrac{1}{n-1}$ (pentru $n \geq 2$) **1p**

Deci $a_n - a_{n+1} \geq \dfrac{a_n^2}{a_n+n} > 0$,oricare ar fi $n \geq 2$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător **1p**

Fiind strict descrescător şi mărginit inferior de 0, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **1p**

b) Vom demonstra prin inducţie că $a_n < \dfrac{1}{n-2}$, pentru orice $n \geq 3$ **2p**

Inegalitatea are loc pentru $n=3$, întrucât $a_3 = \dfrac{2}{3} < 1$.

Presupunem că $a_k < \dfrac{1}{k-2}$ $(k \geq 3)$ şi avem:

$$\frac{1}{k-1} - a_{k+1} = \frac{1-(k-2)\,a_k}{(k-1)\,(a_k+k)} > 0 \Rightarrow a_{k+1} < \frac{1}{k-1}.$$

Ca urmare, pentru orice $n \geq 3$ avem:

$$\frac{1}{n-1} \leq a_n < \frac{1}{n-2} \Rightarrow \frac{n}{n-1} \leq na_n < \frac{n}{n-2}.$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$ **2p**

Problema 4.

Notând $x_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$, rezultă că

$$x_n \to 0 \text{ şi } (a_n-1)^2 = 2x_n\left(1+a_n^2\right), \text{ pentru orice } n \geq 1. \qquad \textbf{(1)}$$ **1p**

Vom demonstra că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Presupunând că $(a_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit superior, atunci, pentru orice număr natural $n \geq 1$, există $k_n \geq 1$ astfel încât $a_{k_n} > n$ şi $k_n < k_{n+1}$. Rezultă că $a_{k_n} \to \infty$ şi

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{k_n}}{1+a_{k_n}^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{k_n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a_{k_n}^2}} \right) = 0,$$

contradicţie. Deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior **2p**

Analog se demonstrează că $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit **2p**

Ca urmare, există $M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 1$.

Din relaţia **(1)** deducem că $|a_n - 1| = \sqrt{2x_n\,(1+a_n^2)} \leq \sqrt{2\,(1+M^2)\cdot x_n} \longrightarrow 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ **2p**

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Fie e elementul neutru al grupului $(F, \circ)$. Vom arăta că mulţimea $B = e(A)$ satisface condiţiile date **2p**

În primul rând observăm că, pentru $b = e(a) \in B$, avem $e(b) = e(e(a)) = (e \circ e)(a) = e(a) = b$, deci $e_{|B} = \mathbf{1}_B$; în plus $e(x) = x$ dacă şi numai dacă $x \in B$ **1p**

- Pentru orice $f \in F$ şi orice $x \in A$ avem $f(x) = (e \circ f)(x) = e(f(x))$, deci $f(x) \in B$. Aşadar $\operatorname{Im} f \subset B$.
- Dacă $\overline{f}$ este simetrica lui f în $(F, \circ)$ şi $x \in B$, atunci

$$\left(f_B \circ \overline{f}_B\right)(x) = \left(\overline{f}_B \circ f_B\right)(x) = e_{|B}(x) = x = \mathbf{1}_B(x),$$

deci f_B este inversabilă şi, ca urmare, bijectivă **2p**

b) Dacă $x, y \in A$ şi există $f_0 \in F$ astfel încât $f_0(x) = f_0(y)$, atunci $f_0(e(x)) = f_0(e(y))$. Cum $e(x)$ şi $e(y)$ sunt elemente din B şi $f_{0|B}$ este bijectivă, rezultă $e(x) = e(y)$, de unde

$$f(x) = (f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(e(y)) = (f \circ e)(y) = f(y)$$

pentru orice $f \in F$ **2p**

Problema 2. Pentru $x \in G$, notăm $C(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$ (centralizatorul lui x). Din enunţ, $C(a)$ şi $C(b)$ sunt finite, nevide (deoarece $e \in C(x)$, pentru orice $x \in G$) şi $|C(a)| + |C(b)| = p \geq 2$, p prim. Trebuie să aflăm numărul elementelor mulţimii $\{y \in G \mid ay = ya \text{ şi } by = yb\} = C(a) \cap C(b)$ **2p**

Deoarece $C(a)$ şi $C(b)$ sunt subgrupuri în G, atunci şi $C(a) \cap C(b)$ este subgrup în G **1p**

Din teorema Lagrange rezultă

$$\operatorname{ord}(C(a) \cap C(b)) \mid \operatorname{ord} C(a) \quad \text{şi} \quad \operatorname{ord}(C(a) \cap C(b)) \mid \operatorname{ord} C(b),$$

deci $\operatorname{ord}(C(a) \cap C(b)) \mid \operatorname{ord} C(a) + \operatorname{ord} C(b) = p$ **2p**

În plus, $|C(a) \cap C(b)| \leq |C(a)| < |C(a)| + |C(b)|$, de unde $|C(a) \cap C(b)| < p$. Ca urmare, $|C(a) \cap C(b)| = 1$, adică singurul element care comută şi cu a şi cu b este e **2p**

Problema 3. Pentru orice $x \in (0, \infty)$ avem $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ şi

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x + \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right)' dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x + F\left(\frac{1}{x}\right) + \mathcal{C} \end{aligned}$$ **4p**

Întrucât funcţia $x \longmapsto \dfrac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ este o primitivă pe $(0, \infty)$ a funcţiei f, rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x + F\left(\dfrac{1}{x}\right) + c$,pentru orice $x > 0$ **1p**

Pentru $x = 1$, din egalitatea precedentă rezultă că $c = -\dfrac{\pi^2}{8}$, deci

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x + F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi^2}{8}, \ \forall x > 0.$$

Ca urmare, trecând la limită $x \to \infty$, avem $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \dfrac{\pi^2}{4} + F(0) - \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{8}$ **2p**

Problema 4. Fie $T > 0$ o perioadă a lui f. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem:

$$(F(x+T) - F(x))' = f(x+T) - f(x) = 0,$$

deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x+T) - F(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (de fapt, $c = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t)\,dt$) **2p**

Funcţia $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = F(x) - \frac{c}{T}x$ este derivabilă şi periodică, o perioadă a sa fiind T. Deoarece $\Phi(\mathbb{R}) = \Phi([0,T])$ şi $\Phi|_{[0,T]}$ este continuă, rezultă că Φ este funcţie mărginită **1p**

Fie $M = \sup|\Phi(x)|$; atunci $0 \le \Phi(x) + M \le 2M$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru orice număr natural $n \ge 1$ avem:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)}{k^2} + \frac{c}{T}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Observând că $\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)+M}{k^2} - M\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $\forall n \ge 1$, deducem că:

- Şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\ge 1}$ este convergent, fiind strict crescător şi mărginit superior de 2
- Şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)+M}{k^2}\right)_{n\ge 1}$ este crescător şi mărginit superior de $4M$, deci convergent.

Prin urmare, şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)}{k^2}\right)_{n\ge 1}$ este convergent **3p**

Întrucât $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) = +\infty$, deducem că şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este convergent dacă şi numai dacă $c = 0$, echivalent cu $F(x+T) - F(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică F este periodică **1p**