

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a V-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + \dots + \overline{a_{90}b_{90}}$	2p
$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + \dots + \overline{a_{90}b_{90}} = 10 + 11 + \dots + 99 = 4905$	1p
$a_1 = 4$	1p
$b_1 = 7$	1p
$\overline{a_2b_2} = 79$	1p
$\overline{a_1b_1a_2b_2} = 4779$	1p

Problema 2.

$11n + 7 = 70c_1 + 8$	1p
$8n + 5 = 50c_2 + 13$	1p
$55n + 35 = 350c_1 + 40$	1p
$56n + 35 = 350c_2 + 91$	1p
$n = 350(c_2 - c_1) + 51 = M_{10} + 1$	2p
$u(n) = 1$	1p

Problema 3.

$S_1 = 1, S_2 = 5$	1p
$S_3 = 113, S_4 = 27761$	1p
$5? = 86.400.000 = M_{10^5}$	1p
$k? = M_{10^5}, \forall 5 \leq k \leq n$	1p
$S_n = S_4 + M_{10^5}$	2p
$S_n = \dots 27.761$	1p

Problema 4.

$2007 = 3 \cdot 669 = M_3$	1p
$2006 = 3 \cdot 668 + 2 \neq M_3$	1p
n înlocuit cu $2n : 3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid 2n$	2p
n înlocuit cu $s(n) : n \equiv s(n) \pmod{3}$	2p
Finalizare	1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$S = \{a, b, a + b\}$, cu $1 \leq a < b < a + b \leq 2006$	1p
$2a < a + b \leq 2006 \Rightarrow 1 \leq a \leq 1002$	1p
Submulțimile <i>binecrescute</i> care conțin un $a \in \{1, 2, \dots, 1002\}$ sunt $\{a, a + 1, 2a + 1\}$, $\{a, a + 2, 2a + 2\}$... $\{a, 2006 - a, 2006\}$	2p
$N_a = 2006 - 2a$	2p
$N = 1005\ 006$	1p

Problema 2.

a) n_k° sunt diferite, $k = \overline{1, 18} \Rightarrow n_1^\circ + n_2^\circ + \dots + n_{18}^\circ \geq 171^\circ$, contradicție	3p
b) Există 15 unghiuri cu măsurile $\geq 12^\circ \Rightarrow$ suma măsurilor lor este $\geq 180^\circ > 170^\circ$, contradicție	4p

Problema 3.

$A_{n-1}A_n = n!$	2p
$A \in (A_m A_{m+1}) \Rightarrow A_0 A_m < A_0 A < A_0 A_{m+1}$	1p
$2006 = 1! + 2! + \dots + m! + A_m A$	2p
$m = 6$	1p
$A \in (A_6 A_7) \Rightarrow A$ este colorat în roșu	1p

Problema 4.

Resturile la împărțirea cu $2, 3, \dots, 9$ sunt $1, 2, \dots, 8$	3p
$d \mid n + 1, 1 \leq d \leq 9$	2p
$n + 1 = c.m.m.m.c. [2, 3, \dots, 9] = 2520 \Rightarrow n = 2519$	2p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$a_i \mid a_j$ și $a_i \neq a_j \Rightarrow a_j \geq 2a_i$	2p
$a_k \geq 2^{k-1}a_1, k = \overline{1, 11}$	2p
$a_1 = 1$	1p
$a_k = 2^{k-1}, k = \overline{1, 11}$	2p

Problema 2.

$\frac{m^k}{n^k} \in A, \forall k \in \mathbb{N}^*$	2p
$\frac{n^k}{m^k} \in A, \forall k \in \mathbb{N}^*$	2p
Unul dintre numerele $\frac{m^k}{n^k}$ și $\frac{n^k}{m^k}$ este mai mic decât 1	2p
$(0, 1) \cap A$ este infinită	1p

Problema 3.

a) $A' \in (BC)$ a.î. $[A'B] \equiv [AB]$	1p
$A'D = AD = A'C$	1p
$m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{C})$	2p
b) $CD > AD$	2p
$CD < 2AD$	1p

Problema 4.

Alegerea punctelor P și Q	2p
$\triangle FPM \equiv \triangle MQE$ (LLL) $\Rightarrow \widehat{FPM} \equiv \widehat{EQM}$	3p
$\widehat{FPD} \equiv \widehat{EQD}$	1p
$\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$	1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$$E = (tx + 1)(ty + 1) + (ty + 1)(tz + 1) + (tz + 1)(tx + 1) - 3 \dots\dots\dots 3p$$

$$|tx| = |t| \cdot |x| \leq 1 \text{ și analoagele } \dots\dots\dots 1p$$

$$tx + 1 \geq 0 \text{ și analoagele } \dots\dots\dots 1p$$

$$E \geq -3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\min E = -3 \text{ (} x = y = z = 1, t = -1 \text{)} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2.

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) = 1 - 6abc \dots\dots\dots 4p$$

$$27abc \leq (a + b + c)^3 = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Observație. Pentru menționarea inegalității mediilor $MA - MG$ se acordă cele 2p de mai sus.

$$\text{Finalizare } \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3.

Aplicarea principiului cutiei pentru hexagonul regulat și alegerea celor trei puncte pe arcul AB $\dots\dots\dots 3p$

$$\text{Pentru orice trei puncte } Q, R, S \text{ de pe arcul } AB \Rightarrow A[QRS] \leq A[AQB] \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Pentru orice punct } Q \text{ de pe arcul } AB \text{ avem } A[AQB] \leq A[APB] \dots\dots\dots 2p$$

$$A[APB] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4.

$$A, G, G', A_1 \text{ coliniare } \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{G'A}{G'A_1} = 6 \dots\dots\dots 1p$$

$$G'A_1 = \frac{m}{7} \text{ și } G'G = \frac{4m}{21} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{MC}{MG} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$MN = \frac{2}{5}l \dots\dots\dots 1p$$

$$GMG'N \text{ ortodiagonal } \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Aria } [GMG'N] = \frac{8}{105}S \dots\dots\dots 1p$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$\frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right)$ și analoagele	2p
$x+y+z \leq x^2+y^2+z^2$	3p
$xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$	1p
Finalizare	1p

Problema 2.

$a_1 = 1$	1p
$a_2 = 2$	1p
Aplicarea principiului inducției $\Rightarrow a_n = n$	5p

Problema 3.

$\overrightarrow{AG_a} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OA}$ și analoagele	2p
a) $\overrightarrow{G_aG_b} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow G_aG_b \parallel AB$	1p
b) AG_a, BG_b și CG_c sunt concurente în P dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AG_a} \\ \overrightarrow{BP} = \beta\overrightarrow{BG_b} \\ \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CG_c} \end{array} \right.$	2p
$\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{5}$	1p
c) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OH} \Rightarrow O, P, H$ coliniare $\Rightarrow G, H, P$ coliniare	1p

Problema 4.

Înlăturarea celor $2mn$ celule din coloanele de indice par $(2, 4, \dots, 2n)$ nu permite așezarea discului de diametru 1,1	2p
Numărul k de celule înlăturate este $k \leq 2mn - 1 \Rightarrow$ există un pătrat 2×2 care să conțină cel mult o celulă ce va fi fost înlăturată	3p
Discul de rază maximă r care poate fi înscris în 3 celule (rămase) are $r + r\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 1p $r = 2 - \sqrt{2} > 0,55 \Rightarrow$ un disc de diametru 1,1 poate fi înscris în regiunea rămasă \Rightarrow $N_{\max} = 2mn - 1$	1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$$a_k \in [6, 7] \Rightarrow 13a_k - 42 \geq a_k^2 \dots\dots\dots 3\text{p}$$

$$\log_{a_k} (13a_{k+1} - 42) \geq 2 \log_{a_k} a_{k+1} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Inegalitatea mediilor și finalizare 3p

Problema 2.

$$a) a - b|b^2 \Rightarrow a - b \leq b^2 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$b = \min A \Rightarrow a \leq b + b^2, \forall a \in A \Rightarrow A \text{ este finită} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$b) n = 2 : A = \{1, 2\} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ cu } x_0 = a_1 a_n, x_1 = a_1(a_1 + a_n), x_2 = a_2(a_1 + a_n), \dots, x_n = a_n(a_1 + a_n) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

X are proprietatea (P) 2p

Problema 3.

$$f(0) = 0 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

f este funcție aditivă 2p

$$f(q) = \lambda q, \forall q \in \mathbb{Q}, \text{ unde } \lambda = f(1) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$f(x) = \lambda x, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

Înlocuirea în relația din enunț și obținerea $\lambda = \pm 1 \Rightarrow f = \pm 1_{\mathbb{R}}$ 1p

Problema 4.

$$\text{Aducerea la forma } 2007^u - 2006^u + u = 2007^v - 2006^v + v \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a+1)^x - a^x + x$ este strict crescătoare (cu demonstrație!) . 3p

Observație. Pentru menționarea strictei monotonii a lui f , fără demonstrație, se acordă 1p

$$u = v \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + m) = 0 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$m > \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

- $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător 1p
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 1p
 $a_n \leq a_{n+1} \leq a_n + 1$ 2p
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 1p
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$ (lema Cesaro-Stolz) 2p

Problema 2.

- a) a_{ij} se poate schimba cu $2(n-1)$ elemente ale lui A 1p
 \mathcal{M} are exact $\frac{n^2 \cdot 2(n-1)}{2} = n^2(n-1)$ elemente 1p
b) $\sum_{X \in \mathcal{M}_1} \det X = \sum_{X \in \mathcal{M}_2} \det X$ 2p
 $\det X_{jk}^i = n \det A + (a_{ik} - a_{ij})A_{ij} + (a_{ij} - a_{ik})A_{ik}$
 $\sum_{i=1}^n \det X_{jk}^i = (n-2) \det A$ 2p
 $\sum_{X \in \mathcal{M}} \det X = n(n-1)(n-2) \det A$ 1p

Problema 3.

- $A \neq rI_2$ 1p
Reducerea la absurd: există $n \geq 2$ astfel ca $A^n = r^n I_2$ 1p
 $m_A \mid X^n - r^n$ 1p
 $\text{grad}(m_A) = 1 \Rightarrow m_A = X - r \Rightarrow A = rI_2$, contradicție 1p
 $\text{grad}(m_A) = 2 \Rightarrow m_A = X^2 - 2r \cos \frac{2k\pi}{n} X + r^2$ 2p
 $m_A \mid p_A \Rightarrow p_A = m_A \Rightarrow \text{Tr } A = 2r \cos \frac{2k\pi}{n} \leq 2r$, contradicție 1p

Problema 4.

- a) Dacă $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists m \geq 0, p \geq 1$ a.î. $(a_n)_{n \geq 1}$ este periodic 1p
 $0 \leq R \leq P$ și $\sum_{i=1}^n a_i = M + \left[\frac{n-m}{p} \right] P + R$ pentru $r = n - m - \left[\frac{n-m}{p} \right] p$ 2p
 $\frac{M-P}{n} + \frac{n-m}{np} P < \mu_n \leq \frac{M+P}{n} + \frac{n-m}{np} P \Rightarrow \mu_n \rightarrow \frac{P}{p}$ 1p
b) Alegerea lui a pentru care există subșiruri cu limitele 0, 9 1p
Demonstrarea existenței unui subșir convergent la $x \in [0, 9]$ 2p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$(x^2 + \sin x)(x^2 + \cos x)' = 2x^3 - x^2 \sin x + 2x \sin x - \sin^2 x$	1p
$(x^2 + \sin x)'(x^2 + \cos x) = 2x^3 + x^2 \cos x + 2x \cos x + \cos^2 x$	1p
$(x^2 + \sin x)'(x^2 + \cos x) - (x^2 + \sin x)(x^2 + \cos x)' = x^2(\cos x + \sin x) + 2x(\cos x - \sin x) +$ 1	2p
Calculul primitivei	3p

Problema 2.

a) f bijectivă	1p
b) $(f^{-1})' \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$	1p
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\pi}{2}$ (cu Cesaro-Stolz)	2p
d) $x_n \rightarrow 0$	0,5p
$\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$	1,5p
e) Demonstrarea egalității	1p

Problema 3.

Mulțimea H a funcțiilor din G care admit primitive este subgrup în G	1p
Formularea rezultatului de demonstrat: (G, \cdot) grup și $H \leq G$, atunci orice aplicație $u : G \rightarrow G$ cu $u(e) = e$ și $u(xy) = u(x)u(y)$, $\forall x, y \in G \setminus H$ este endomorfism	1p
$x \in H$ și $y \in G \setminus H \Rightarrow u(xy) = u(x)u(y)$	3p
$x, y \in H \Rightarrow u(xy) = u(x)u(y)$	2p

Problema 4.

$f(\mathbb{R}) \subset (-1, 1)$	1p
$f([-1, 1]) = [-\lambda, \lambda]$, $0 < \lambda < 1$	1p
$ F(x) \leq \lambda x \leq 1$, $\forall x \in [-1, 1]$	2p
$(a_n)_{n \geq 0} \subset [-1, 1]$	1p
$ a_n = F(a_{n-1}) \leq \lambda a_{n-1} $	1p
$ a_n \leq \lambda^n a_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$	1p