

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a V-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$n = 13c + r = 11r + c$	2p
$6c = 5r$, deci c este multiplu de 5.....	2p
i) $c = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow n = 0$	1p
ii) $c = 5 \Rightarrow r = 6 \Rightarrow n = 71$	1p
iii) $c = 10 \Rightarrow r = 12 \Rightarrow n = 142$	1p

Problema 2.

$S = (1 + 2 + 3 - 4) + (5 + 6 + 7 - 8) + \dots + (2001 + 2002 + 2003 - 2004) + 2005$	3p
$S = 1005\ 007$	4p

Problema 3.

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 2004 = 2009\ 010$ ori 2p
b) Fie n numărul de cifre 1 care apar în scrierea numărului A . Acesta se poate scrie ca succesiunea secvențelor

$$1, 01, 001, 0001, \dots, \underbrace{00\dots0}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} 1,$$

- urmate, eventual, de un număr mai mic decât $n + 1$ de cifre 0. 2p
 $1 + 2 + 3 + \dots + n \leq 2005 < 1 + 2 + \dots + n + (n + 1)$ 1p
 $62 \cdot 63 < 4010 < 63 \cdot 64 \Rightarrow n = 62$ 1p
Numărul cifrelor 0 este $2005 - 62 = 1943$ 1p

Problema 4.

- Primul copil poate ocupa una dintre cele 8 intersecții ale primei străzi orizontale. 1p
Pentru a nu fi văzut de primul, al doilea poate ocupa doar 7 dintre intersecțiile celei de-a doua străzi orizontale..... 1p
Primii doi copii se pot așeza în $8 \cdot 7 = 56$ moduri 2p
Pentru fiecare din cele 56 de moduri, al treilea copil se poate afla doar în 6 intersecții ale celei de-a treia străzi orizontale 2p
În final sunt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 40\ 320$ posibilități 1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a VI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$100a + 10b + c = a + 5b + 25c \Leftrightarrow 99a + 5b = 24c$	2p
$a \leq 2$	2p
$a = 1 \Rightarrow b = 9, c = 6$	2p
$a = 2 \Rightarrow c > 8 \Rightarrow c = 9 \Rightarrow 5b = 18$, imposibil	1p

Problema 2.

$A = 5a + 2 = 3b + 1$	2p
$\begin{array}{l} 6A = 30a + 12 \\ 5A = 15b + 5 \end{array} \Bigg \Rightarrow A = 15(2a - b) + 7$	4p
Restul împărțirii lui A la 15 este 7	1p

Problema 3.

$p = 2 \Rightarrow 2^2 + 2^2 = 8$, care nu este prim	1p
$p = 3 \Rightarrow 2^3 + 3^2 = 17$, care este număr prim	1p
$p > 3 \Rightarrow p = 2k + 1 \Rightarrow 2^p = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k = 2 \cdot (3 + 1)^k = \mathcal{M}3 - 1$	2p
$3 \mid (p - 1)p(p + 1)$ și $3 \nmid p \Rightarrow 3 \mid p^2 - 1 \Rightarrow p^2 = \mathcal{M}3 + 1$	2p
$2^p + p^2 = \mathcal{M}3 - 1 + \mathcal{M}3 + 1 = \mathcal{M}3$, nu convine	1p

Problema 4.

$m(\widehat{A_0OA_1}) = u^\circ \Rightarrow u + 2u + 2^2u + \dots + 2^{n-1}u = 180$	2p
$(2^n - 1)u = 180$	2p
$2^n - 1 \in \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$	1p
$n = 2, u = 60$	1p
$n = 4, u = 12$	1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a VII-a

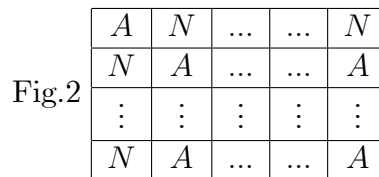
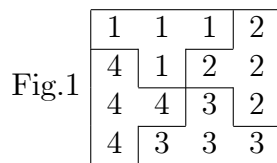
BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

- Presupunem că există $n, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $225n - 4 = k(k + 1)$ **2p**
 $900n - 16 = 4k^2 + 4k \Rightarrow 900n - 15 = (2k + 1)^2$ **2p**
 $5 \mid 2k + 1$ **1p**
 $25 \mid (2k + 1)^2 \Rightarrow 25 \mid 15$, contradicție **2p**

Problema 2.

- Fiecare piesă acoperă 4 pătrățele $\Rightarrow 4 \mid n^2 \Rightarrow n$ par **1p**
 Pentru $n = 4$ există o acoperire a tablei cu piese de forma dată (fig. 1) **1p**
 $n = 4k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ tabla poate fi acoperită cu k^2 piese din cele date **1p**
 $n = 4k + 2 \Rightarrow$ sunt necesare $(2k + 1)^2$ piese pentru a o acoperi. Vom presupune că există o acoperire a tablei cu piese de forma dată. Colorăm tabla de șah cu două culori, fie acestea alb (A) și negru (N) (fig. 2) **2p**



O piesă poate acoperi, indiferent de poziționarea sa, unul sau trei pătrățele de aceeași culoare. Dacă acoperirea ar fi posibilă, întrucât sunt necesare $(2k + 1)^2$ piese, numărul pătrățelelor colorate cu alb, respectiv cu negru, ar fi impar. Modul în care a fost făcută colorarea arată că numărul pătrățelelor albe este însă par, contradicție. **2p**

Problema 3.

- $m(\widehat{BIC}) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\widehat{BAC}) > 90^\circ$ **2p**
 $IA' < \frac{1}{2}BC = B'C' < IB' + IC'$ **3p**
 Analog $IB' < IA' + IC'$ și $IC' < IA' + IB'$ **2p**

Problema 4.

- a) $\triangle ABQ \equiv \triangle BCM \equiv \triangle CDN \equiv \triangle DAP \Rightarrow (BQ) \equiv (CM) \equiv (DN) \equiv (AP)$ **1p**
 $\triangle AQH \equiv \triangle BME \equiv \triangle CNF \equiv \triangle DPG \Rightarrow (QH) \equiv (ME) \equiv (NF) \equiv (PG)$ **1p**
 $QH + EB = ME + FC = NF + DG = PG + HA \Rightarrow EFGH$ este romb **1p**
 $m(\widehat{QHA}) = 180^\circ - m(\widehat{HQA}) - m(\widehat{HAQ}) = 90^\circ$ **1p**
 b) Folosim teorema: Într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 15° , înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este $\frac{1}{4}$ din aceasta.
 $HR \perp AB, R \in AB \Rightarrow HR = \frac{a}{4} \Rightarrow \text{Aria}[ABH] = \frac{a^2}{8}$ **1p**
 $\text{Aria}[BCE] = \text{Aria}[CDF] = \text{Aria}[DAG] = \frac{a^2}{8}$ **1p**
 $\text{Aria}[EFGH] = \text{Aria}[ABCD] - 4 \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \text{Aria}[ABCD]$ **1p**

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

a) $\sqrt{a^2 + 8b} + \sqrt{b^2 + 8a} = \sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(b-4)^2} \geq |(a-4) - (b-4)| = |a-b|$ **2p**

b) $A := \sqrt{m^2 + 8n}$, $B := \sqrt{n^2 + 8m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow m^2 + 8n$ și $n^2 + 8m$ sunt simultan pătrate perfecte. Presupunem că $m \leq n \Rightarrow n^2 \leq n^2 + 8m \leq n^2 + 8n < (n+4)^2$ **2p**

$n^2 + 8m = n^2 \Rightarrow m = 0$ și $n = 2h^2$, unde $h \in \mathbb{N}$ **0,5p**

$n^2 + 8m = (n+1)^2 \Rightarrow 8m = 2n+1$, imposibil **0,5p**

$n^2 + 8m = (n+2)^2 \Rightarrow m^2 + 16m - 8 = k^2 \Leftrightarrow (m-k+8)(m+k+8) = 72$.. **0,5p**

$(m, k) \in \{(1, 3), (3, 7), (11, 17)\} \Rightarrow (m, n) \in \{(1, 1), (3, 5), (11, 21)\}$ **1p**

$n^2 + 8m = (n+3)^2 \Rightarrow 8m = 6n+9$, imposibil **0,5p**

Problema 2.

a) $n = 11p \pm 1 \Rightarrow n^5 = \mathcal{M}11 \pm 1$ **1p**

b) $n = 11p \pm 2 \Rightarrow n^5 = \mathcal{M}11 \pm 2^5 = \mathcal{M}11 \pm 1$ **1p**

c) $n = 11p \pm 3 \Rightarrow n^5 = \mathcal{M}11 \pm 3^5 = \mathcal{M}11 \pm 1$ **1p**

d) $n = 11p \pm 4 \Rightarrow n^5 = \mathcal{M}11 \pm 4^5 = \mathcal{M}11 \pm 1$ **1p**

e) $n = 11p \pm 5 \Rightarrow n^5 = \mathcal{M}11 \pm 5^5 = \mathcal{M}11 \pm 1$ **1p**

Așadar n^5 poate fi de forma $11p+1$ sau $11p+10$. Cum $n^5 \geq 11k+2$, rezultă că $n^5 \geq 11k+10$ **2p**

Problema 3.

a) $I \notin B'C'$ **1p**

$I \notin \text{Int}(AB'C')$ **1p**

$I \in \text{Int}(A'B'C')$ **1p**

b) $\frac{A_1B'}{A_1C'} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{CA}{AB}$, $\frac{B_1C'}{B_1A'} = \frac{AB}{BC}$, $\frac{C_1A'}{C_1B'} = \frac{BC}{CA}$ **2p**

$\frac{A_1B'}{A_1C'} \cdot \frac{B_1C'}{B_1A'} \cdot \frac{C_1A'}{C_1B'} = 1 \Rightarrow A'A_1, B'B_1, C'C_1$ **2p**

Problema 4.

Vom folosi teorema: Fie XYZ un triunghi oarecare, $S \in (XY)$, $T \in (XZ)$ astfel încât ST trece prin centrul de greutate al triunghiului XYZ . Atunci $\frac{SY}{SX} + \frac{TZ}{TX} = 1$.

Presupunem că MN , NP și PQ , trec prin centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , BCD , respectiv $CDA \Rightarrow \frac{NC}{NB} + \frac{MA}{MB} = 1$, $\frac{NB}{NC} + \frac{PD}{PC} = 1$ și $\frac{PC}{PD} + \frac{QA}{QD} = 1$ **3p**

$3 = \frac{NC}{NB} + \frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NC} + \frac{PD}{PC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QA}{QD} > 4$, contradicție **2p**

Exemplu: MN și PQ paralele prin centrele de greutate ale triunghiurilor ABC respectiv CDA la dreapta AC **2p**

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ 1p
 $a_{k+1} > a_{k+1} - a_1 \in A \Rightarrow a_{k+1} - a_1 \leq a_k \Rightarrow a_{k+1} - a_k \leq a_1$ 2p
 $a_{k+1} - a_k \in A \Rightarrow a_{k+1} - a_k \geq a_1$ 2p
 $a_{k+1} - a_k = a_1, \forall k \geq 1$ 1p
 $a_n = na_1$, pentru orice $n \geq 1$ 1p

Problema 2.

- $IJ \parallel BC$ 2p
 $\vec{IJ} = \lambda \vec{BC} = \lambda \vec{AC} - \lambda \vec{AB}$ 1p
 $AM = m, AB = c$ și $AC = b \Rightarrow \vec{AI} = \frac{c\vec{AM} + m\vec{AB}}{m+c+\frac{a}{2}}$ și $\vec{AJ} = \frac{b\vec{AM} + m\vec{AC}}{m+b+\frac{a}{2}}$ 1p
 $\vec{IJ} = \alpha \left(\frac{a(b-c)}{4} - \frac{m(a+b+c)}{2} - m^2 \right) \vec{AB} + \alpha \left(\frac{a(b-c)}{4} + \frac{m(a+b+c)}{2} + m^2 \right) \vec{AC}$ 1p
 $\frac{a(b-c)}{4} - \frac{m(a+b+c)}{2} - m^2 = - \left(\frac{a(b-c)}{4} + \frac{m(a+b+c)}{2} + m^2 \right) \Rightarrow b = c$ 2p

Problema 3.

- $x = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{a} \right] + \left[\frac{2}{a} \right] + \dots + \left[\frac{p-1}{a} \right] = 0$ 1p
 $a < 0$ nu convine $\Rightarrow a > 0 \Rightarrow \left[\frac{k}{a} \right] = 0$, pentru $k = \overline{1, p-1}$ 1p
 $\left[\frac{n}{a} \right] = \left[\frac{n}{p} \right], \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p
 $\left[\frac{pn}{a} \right] = n \Rightarrow n \leq \frac{pn}{a} < n+1 \Rightarrow p - \frac{p}{n+1} < a \leq p, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p
 $a < p$ contradicție $\Rightarrow a = p$ 1p

Problema 4.

- A_1 este punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris $\triangle ABC$ 1p
 $\vec{OH}_a = \vec{OA}_1 + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OH} - 2\vec{OA}$ 1p
 $\vec{AH}_a = \vec{AO} + \vec{OH}_a = \vec{OH} - 3\vec{OA}$ și analoge 1p
Dreptele AH_a, BH_b și CH_c sunt concurente într-un punct P dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

astfel încât:

$$\begin{cases} \vec{AP} = \alpha \vec{AH}_a \\ \vec{BP} = \beta \vec{BH}_b \\ \vec{CP} = \gamma \vec{CH}_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{OP} = \alpha \vec{OH} - (3\alpha - 1) \vec{OA} \\ \vec{OP} = \beta \vec{OH} - (3\beta - 1) \vec{OB} \\ \vec{OP} = \gamma \vec{OH} - (3\gamma - 1) \vec{OC} \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ 1p

$\vec{OP} = \frac{1}{3} \vec{OH} = \vec{OG} \Rightarrow P = G$ 1p

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

- Cazul $n = 0 \Rightarrow A < B$ **1p**
 Cazul $n = 1 \Rightarrow A = B$ **1p**
 Cazul $n \geq 2$. Căutăm o „spargere“ a inegalității $A > B$ de forma: $\alpha a^n b + \beta b^n c + \gamma c^n a > a^{n-1}bc$, cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$ și $\alpha, \beta, \gamma > 0$ **1p**
 $\alpha a^n b + \beta b^n c + \gamma c^n a > a^{n\alpha + \gamma} b^{n\beta + \alpha} c^{n\gamma + \beta}$ (inegalitatea ponderată a mediilor) **2p**

$$\begin{cases} n\alpha + \gamma = n - 1 \\ n\beta + \alpha = 1 \\ n\gamma + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}, \beta = \frac{1}{n^2-n+1} \text{ și } \gamma = \frac{n-1}{n^2-n+1}$$
 **1p**
 $ab^n c + \beta c^n a + \gamma a^n b > ab^{n-1}c$ și $\alpha c^n a + \beta a^n b + \gamma b^n c > abc^{n-1}$ **0,5p**
 $A > B$ **0,5p**

Problema 2.

- a) Contraexemplu: $a = \sqrt{2}$ și $b = \log_2 9$ **1p**
 b) $\log_2 f(1) = \log_{f(3)} 4 = \log_6 f(5) = \log_{f(7)} 8 = \dots \stackrel{\text{not}}{=} x \Rightarrow x = 1$ **2p**
 $\log_3 f(2) = \log_{f(4)} 5 = \log_7 f(6) = \log_{f(8)} 9 = \dots \stackrel{\text{not}}{=} y \Rightarrow y = 1$ **3p**
 $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f(n) = n + 1$ **1p**

Problema 3.

- $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k \geq \frac{1}{n^{k-1}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k$ **1p**
 $x_1^{2k} + x_2^{2k} + \dots + x_n^{2k} \geq \frac{1}{n^{k-1}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^k = \frac{1}{n^{k-1}}$ **1p**
 Pp. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \Rightarrow \exists p$ a.î. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p < 0 \leq x_{p+1} \leq \dots \leq x_n \Rightarrow$
 $\min_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_n$ **1p**
 $x_1^{2k} + x_2^{2k} + \dots + x_p^{2k} \leq x_1^k (x_1^k + x_1^k + \dots + x_p^k) = -x_1^k (x_{p+1}^k + x_{p+2}^k + \dots + x_n^k) \leq$
 $-(n-p) x_1^k x_n^k$ **1p**
 $x_{p+1}^{2k} + x_{p+2}^{2k} + \dots + x_n^{2k} \leq x_n^k (x_{p+1}^k + x_{p+2}^k + \dots + x_n^k) = -x_n^k (x_1^k + x_1^k + \dots + x_p^k) \leq$
 $-p x_1^k x_n^k$ **1p**
 $\frac{1}{n^{k-1}} \leq x_1^{2k} + x_2^{2k} + \dots + x_n^{2k} \leq -n x_1^k x_n^k \Rightarrow x_1 x_n \leq -\frac{1}{n}$ **1p**
 $x_1 x_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow$ contradicție **1p**

Problema 4.

- $\text{Im } f \subset [a, a\sqrt{2}]$ **2p**
 $\text{Im } f \supset [a, a\sqrt{2}]$. Fie $\lambda \in [a, a\sqrt{2}]$. Analizăm cazurile:
 a) $\lambda = a \Rightarrow f(M) = a$ (M mijlocul lui $[AD]$) **1p**
 b) $\lambda = a\sqrt{2} \Rightarrow f(A) = BD = a\sqrt{2}$ **1p**
 c) $\lambda \in (a, a\sqrt{2}) \Rightarrow \exists M \in (AD)$ astfel încât $AM \in \left\{ \frac{a - \sqrt{\lambda^2 - a^2}}{2}, \frac{a + \sqrt{\lambda^2 - a^2}}{2} \right\} \Rightarrow$
 $f(M) = \lambda$ **3p**

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

Numărul cazurilor posibile este $A_{m^2}^2$ **1p**

(x_a, y_a) și (x_n, y_n) coordonatele nebunilor $\Rightarrow |x_a - x_n| = |y_a - y_n| \stackrel{\text{not}}{=} l$ **2p**

$l = 1 \Rightarrow [2(m-1)]^2$ moduri în care se atacă **1p**

$l = 2 \Rightarrow [2(m-2)]^2$ moduri în care se atacă etc **1p**

Numărul cazurilor favorabile $\sum_{k=1}^{m-1} (2k)^2 = \frac{2m(2m-1)(m-1)}{3}$ **1p**

$p = \frac{2m(2m-1)(m-1)}{3A_{m^2}^2} = \frac{2(2m-1)}{3m(m+1)}$ **1p**

Problema 2.

Fie m_A polinomul minimal al matricei A și p_A polinomul caracteristic al matricei A , $p_A(X) = \det(I_n X - A)$.

$m_A \mid f \stackrel{\text{not}}{=} X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2 + X + 4)$ **2p**

Divizorii ireductibili peste \mathbb{R} ai lui m_A și p_A (teorema lui Frobenius), sunt din mulțimea $\{X-1, X^2 + X + 4\}$, deci $p_A(X) = (X-1)^i (X^2 + X + 4)^j$, unde $i, j \in \mathbb{N}$, $i + 2j = n$ **3p**

$p_A(-1) = (-1)^n \det(A + I_n) = (-2)^i \cdot 4^j = (-1)^n \cdot 2^n \Rightarrow \det(A + I_n) = 2^n$ **2p**

Problema 3.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ **1p**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{2n}} = 1$ **2p**

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{2n-2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+1} - a_{2n-1}) = 1 \stackrel{(\text{Cesaro-Stolz})}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n-1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$ **1p**

$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n+1]{a_n} - 1) = +\infty$ **1p**

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - n) = +\infty$ **2p**

Problema 4.

Notăm $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+ka_n}$ și $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, $n \geq 1$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ln 2$ **2p**

$|y_n - x_n| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{k(a_n-1)}{(n+ka_n)(n+k)} \right| \leq |a_n - 1| \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \cdot |a_n - 1| \rightarrow 0$ **4p**

$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2$ **1p**

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „NICOLAE COCULESCU“

EDIȚIA a II-a
SLATINA – 26 noiembrie 2005

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$$f(x) + f(\pi - x) = \frac{\pi}{1+3\cos^2 x} \stackrel{\text{not}}{=} \pi g(x) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$(F(x) - F(\pi - x))' = \pi g(x) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{O primitivă a funcției } g \text{ pe } [0, \pi] \text{ este } G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right) - \frac{\pi}{4}, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right) + \frac{\pi}{4}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$F(x) - F(\pi - x) = \pi G(x) + \lambda, x \in [0, \pi] \Rightarrow \lambda = 0 \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$F(\pi) - F(0) = \pi G(\pi) = \frac{\pi^2}{4} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Problema 2.

$$(xz)^n = x^n z^n \text{ și } (xz)^{n+1} = x^{n+1} z^{n+1} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$z^n x = x z^n \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$f \text{ este surjectivă } \Rightarrow \forall y \in G, \exists z \in G \text{ a.î. } y = f(z) = z^n \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$yx = xy, \forall x, y \in G \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Problema 3.

$$\text{a) } F \text{ este bijectivă } \dots\dots\dots 3\text{p}$$

$$\text{b) } x_n \rightarrow 0 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$nx_n \rightarrow 1 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+p}) = p \dots\dots\dots 2\text{p}$$

Problema 4.

$$C_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\} \Rightarrow C_G(x) \leq G \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$Z(G) = \{y \in G \mid xy = yx, \forall x \in G\} \Rightarrow Z(G) \leq G \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} C_G(x)} < 3 \text{ și } \operatorname{ord} C_G(x) \mid \operatorname{ord} G \Rightarrow \operatorname{ord} C_G(x) = \operatorname{ord} G \dots\dots\dots 3\text{p}$$

$$\operatorname{ord} Z(G) > \frac{1}{3} \operatorname{ord} G \text{ și } \operatorname{ord} Z(G) \mid \operatorname{ord} G \Rightarrow \operatorname{ord} Z(G) = \operatorname{ord} G \dots\dots\dots 2\text{p}$$